Глава V. Евклидовы и унитарные пространства
§3. Матрица Грама и определитель Грама

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – евклидово или унитарное пространство, $A = (a_1, \dots, a_m)$ – система векторов пространства V.

Определения

Матрицей Грама системы векторов A называется матрица, составленная из скалярных произведений $\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \dots & (a_m, a_m) \end{pmatrix}$.

Обозначение: G_A.

Определителем Грама системы векторов A называется определитель $|G_A|$.

Обозначение: g_A.

Следующие утверждения непосредственно следуют из определений.

Наблюдения

1. Если V – евклидово пространство, то $G_A^\top = G_A$ для любой системы A.
2. Если V – унитарное пространство, то $\overline{G_A}^\top = G_A$ для любой системы A.
3. Система A ортогональная $\Leftrightarrow$ G_A – диагональная.
4. Система A ортонормированная $\Leftrightarrow$ $G_A = E_m$.

Пусть V – евклидово или унитарное пространство, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – произвольный базис пространства V.

Теорема

Для любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство

$$(x, y) = ([x]_B)^\top \cdot G_B \cdot \overline{[y]}_B. \qquad (1)$$

⇓Запишем $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$, $y = \sum_{k=1}^n \eta_k b_k$. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j b_j, \sum_{k=1}^n \eta_k b_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\xi_j b_j, \eta_k b_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j (b_j, b_k) \overline{\eta}_k =$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=1}^n (b_j, b_k) \overline{\eta}_k = (\xi_1, \ldots, \xi_n)(G_B \cdot \overline{[y]}_B) = ([x]_B)^\top \cdot G_B \cdot \overline{[y]}_B. \Uparrow$$

Следствие

Для любого ортонормированного базиса B евклидова или унитарного пространства V и любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство

$$(x, y) = ([x]_B)^\top \cdot \overline{[y]}_B. \qquad (2)$$

Это непосредственно вытекает из наблюдения 4 сл.2.

Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1, 1, 1, 1)^\top$, $[a_2]_B = (1, -1, 1, -1)^\top$.

Ортогонализовать систему векторов означает найти ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2 \rangle$. Вычислим

$$(a_1, a_2) = [a_1]_B^\top \cdot G_B \cdot [a_2]_B = (1, 1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot (1, -1, 1, -1)^\top =$$

$(4, 5, 4, 8) \cdot (1, -1, 1, -1)^\top = -5$. Аналогично находим $(a_1, a_1) = (4, 5, 4, 8) \cdot (1, 1, 1, 1)^\top = 21$. Применяем процесс ортогонализации Грама-Шмидта: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda b_1$, где $\lambda = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{5}{21}$. Вычисляем $[b_2]_B = (1, -1, 1, -1)^\top + \frac{5}{21}(1, 1, 1, 1)^\top = \frac{2}{21}(13, -8, 13, -8)^\top$. Подпространство $\langle a_1, a_2 \rangle$ имеет ортогональный базис b_1, b_2.

Лемма

Для любой системы векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ и любого скаляра λ имеет место равенство $g_{(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)} = g_{(a_1,\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$.

$\Downarrow$Запишем $g_{(a_1,\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)} =$

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_1, a_\ell) & \ldots & (a_1, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k + \lambda a_\ell, a_1) & \ldots & (a_k + \lambda a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_k + \lambda a_\ell, a_\ell) & \ldots & (a_k + \lambda a_\ell, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_\ell, a_1) & \ldots & (a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_\ell, a_\ell) & \ldots & (a_\ell, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, a_1) & \ldots & (a_m, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_m, a_\ell) & \ldots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}$$

и $g_{(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)} =$

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k) & \ldots & (a_1, a_\ell) & \ldots & (a_1, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & \ldots & (a_k, a_k) & \ldots & (a_k, a_\ell) & \ldots & (a_k, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_\ell, a_1) & \ldots & (a_\ell, a_k) & \ldots & (a_\ell, a_\ell) & \ldots & (a_\ell, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, a_1) & \ldots & (a_m, a_k) & \ldots & (a_m, a_\ell) & \ldots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}.$$

Окончание доказательства леммы

Так как $(a_k + \lambda a_\ell, a_j) = (a_k, a_j) + \lambda(a_\ell, a_j)$, $(a_j, a_k + \lambda a_\ell) = (a_j, a_k) + \overline{\lambda}(a_j, a_\ell)$ при $j \neq k$, и $(a_k + \lambda a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) = (a_k, a_k) + \lambda(a_\ell, a_k) + \overline{\lambda}(a_k, a_\ell) + \lambda\overline{\lambda}(a_\ell, a_\ell)$, легко подсчитать, что определитель $g_{(a_1,\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$ получается из определителя $g_{(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$ путем двух последовательных преобразований: сначала прибавления к k-й строке ℓ-й строки, умноженной на λ, а затем прибавления к k-му столбцу ℓ-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$.$\Uparrow$

Предложение

Если ортогональная система $(b_1, \dots, b_m)$ получена из системы $(a_1, \dots, a_m)$ с помощью процесса ортогонализации (сл.6-7 §2), то $g_{(a_1,\dots,a_m)} = g_{(b_1,\dots,b_m)} = |b_1|^2 \dots |b_m|^2$.

$\Downarrow$Первое равенство следует из леммы сл.5, так как каждый вектор в процессе ортогонализации получается с помощью цепочки преобразований, рассмотренных в указанной лемме:
$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) = (b_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \to (b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1, a_3, \dots, a_m) \to (b_1, b_2, a_3 + \gamma_{21} b_1, \dots, a_m) \to (b_1, b_2, a_3 + \gamma_{21} b_1 + \gamma_{32} b_2, \dots, a_m) \to \dots \to (b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$. Второе равенство следует из того, что в определителе $g_{(b_1,\dots,b_m)}$ элементы вне главной диагонали равны 0, а на главной диагонали расположены элементы $(b_j, b_j) = |b_j|^2$ $(j = 1, \dots, m)$. $\Uparrow$

Следствие

Для любой системы векторов $(a_1, \dots, a_m)$ число $g_{(a_1,\dots,a_m)}$ – действительное неотрицательное и $g_{(a_1,\dots,a_m)} = 0$ тогда и только тогда, когда система $(a_1, \dots, a_m)$ линейно зависима.

$\Downarrow$Первое утверждение следует из предложения; второе выполняется в силу предложения сл.18 §2, так как в процессе ортогонализации из линейно независимой системы получается линейно независимая система, а из линейно зависимой – система, содержащая нулевой вектор. $\Uparrow$

Объем параллелотопа

Понятие параллелотопа обобщает понятия отрезка, параллелограмма, параллелепипеда.

Определения

Параллелотопом, порожденным линейно независимой системой векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ евклидова пространства, называется множество $\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m | 0 \le \lambda_j \le 1 \ (j = 1, \ldots, m)\}$.
Объем параллелотопа $V_{a_1,\ldots,a_m}$ определяется по индукции. База индукции: $V_{a_1} = |a_1|$. Шаг индукции: $V_{a_1,\ldots,a_m} = V_{a_1,\ldots,a_{m-1}} \cdot |b_m|$, где b_m – ортогональная составляющая вектора a_m относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$.

Предложение

Для любой линейно независимой системы $(a_1, \ldots, a_m)$ имеет место равенство $V_{a_1,\ldots,a_m} = \sqrt{g_{(a_1,\ldots,a_m)}}$.

$\Downarrow$По предложению сл.17 §2 при проведении процесса ортогонализации для системы $(a_1, \ldots, a_m)$ каждый вектор b_j $(j = 2, \ldots, m)$ получающейся ортогональной системы является ортогональной составляющей вектора a_j относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{j-1} \rangle$. Отсюда следует, что $V_{a_1,\ldots,a_m} = |b_1| \ldots |b_m|$. В силу предложения сл.7 получаем требуемое.$\Uparrow$

Объем параллелотопа в ортонормированном базисе

Предложение

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный базис евклидова пространства V, $(a_1, \ldots, a_n)$ – линейно независимая система векторов из V, A – матрица, составленная из столбцов координат $[a_j]_e$ векторов a_j в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда $V_{a_1,\ldots,a_n}$ равен модулю определителя матрицы A.

$\Downarrow$В силу следствия сл.3 справедливо равенство $A^\top A = G_{(a_1,\ldots,a_n)}$. Переходя к определителям, получаем $|A^\top \cdot A| = g_{(a_1,\ldots,a_n)}$, откуда по свойствам определителей получаем $g_{(a_1,\ldots,a_n)} = |A^\top||A| = |A|^2$. Применение предложения сл.8 завершает доказательство.$\Uparrow$

В частности, получаем формулу $S = \mod \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ для вычисления площади параллелограмма на плоскости , построенного на векторах $\vec{a_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $\vec{a_2} = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$, которые заданы координатами в ортонормированном базисе.

Формула для объема параллелепипеда известна из аналитической геометрии (получается с помощью смешанного произведения).

Длина ортогональной составляющей

Следствие

Пусть $(a_1, \ldots, a_m)$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства V, и b – ортогональная составляющая вектора a_m относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$. Тогда $|b| = \sqrt{\dfrac{g_{(a_1,\ldots,a_m)}}{g_{(a_1,\ldots,a_{m-1})}}}$.

Это утверждение вытекает из определения объема параллелотопа, согласно которому $|b| = \dfrac{V_{a_1,\ldots,a_m}}{V_{a_1,\ldots,a_{m-1}}}$, и предложения сл.8.

Ориентация базиса в евклидовом пространстве

Пусть V – евклидово пространство размерности n.

Определение

Два базиса B и C пространства V называются *одинаково ориентированными*, если матрица перехода T от базиса B к C имеет положительный определитель.

Предложение

Отношение "быть одинаково ориентированными" является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства V.

$\Downarrow$Очевидно, что два одинаковых базиса одинаково ориентированы (матрица перехода – единичная), поэтому рассматриваемое отношение рефлексивно. Оно симметрично, так как матрица обратного перехода является обратной к матрице перехода (сл.16 §3 гл.I) и $|T^{-1}| = |T|^{-1}$, поэтому определители обеих матриц имеют одинаковый знак.
Транзитивность обеспечивается тем, что если B, C, D – базисы V и $C = B \cdot T$, $D = C \cdot S$, то $D = B \cdot (T \cdot S)$, откуда следует, что $|T \cdot S| = |T||S| > 0$.$\Uparrow$

Множество всех базисов пространства V разбивается на классы эквивалентности по отношению быть одинаково оринтированными. Зафиксируем базис B. Тогда для любого базиса C матрица перехода $T_{B,C}$ имеет положительный или отрицательный определитель. Очевидно, что класс эквивалентности базиса B состоит из всех базисов C, у которых $|T_{B,C}| > 0$. Все остальные базисы также образуют класс эквивалентости, так как если $C = BT_{B,C}$ и $D = BT_{B,D}$, то $D = CT_{B,C}^{-1}T_{B,D}$ и если $|T_{B,C}| < 0, |T_{B,D}| < 0$, то $|T_{B,C}^{-1}T_{B,D}| = |T_{B,C}|^{-1}|T_{B,D}| > 0$, т.е. C и D эквивалентны.

Итак, имеется точно два класса эквивалентности по отношению быть одинаково оринтированными базисами. Поэтому ориентацию пространства задают путем указания конкретного положительно ориентированного базиса. Например, в арифметическом евклидовом пространстве положительно ориентированным считается стандартный базис.

Определение

Ориентация конечномерного евклидова пространства задается путем указания конкретного базиса, который называется *положительно ориентированным*.

Ориентированные флаги

Определение

Флагом в конечномерном евклидовом пространстве V называется цепочка подпространств $\{0_V\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ такая что $\dim V_k = k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Каждый базис $(a_1, \ldots, a_n)$ пространства V определяет флаг в этом пространстве: $\{0_V\} \subset \langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \ldots \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \subset V$. Обратно, по каждому флагу можно построить базис, определяющий этот флаг: пусть a_1 – базис V_1 и $a_j \in V_j \backslash V_{j-1}$ при $j = 2, \ldots, n$.
Базис, определяющий флаг, задает на этом флаге ориентацию: каждое подпространство $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ ориентируется базисом $(a_1, \ldots, a_k)$.
Ориентированный флаг называется *орфлагом*.

Предложение

Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ – базис евклидова пространства V и $(b_1, \ldots, b_n)$ – ортогональный базис, полученный из $(a_1, \ldots, a_n)$ с помощью процесса ортогонализации. Тогда эти базисы определяют одинаковые орфлаги.

$\Downarrow$По теореме сл.6 §2 оба базиса определяют один и тот же флаг. Из способа построения векторов b_k (сл.7 §2) ясно, что матрица перехода от базиса $(a_1, \ldots, a_k)$ к базису $(b_1, \ldots, b_k)$ имеет единицы на главной диагонали и нули ниже ее, поэтому эти базисы ориентированы одинаково.$\Uparrow$

Следствие

Любой орфлаг конечномерного евклидова пространства определяется единственным ортонормированным базисом.

$\Downarrow$Требуемый ортонормированный базис получается нормированием каждого вектора ортогонального базиса, упомянутого в предложении. Единственность следует из того, что в одномерном евклидовом пространстве имеется точно два различных ортонормированных базиса.$\Uparrow$

Пусть V – евклидово пространство размерности n, и $(e_1, \ldots, e_n)$ – фиксированный ортонормированный базис V.

Теорема

Для любой линейно независимой системы векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства V существует единственный вектор b такой, что $b \in \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle^{\perp}$, $|b| = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ и базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ одинаково ориентированы.

$\Downarrow$Запишем координаты векторов $[a_j] = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})^{\top}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Разложим определитель по последнему столбцу:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \xi_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \xi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & \xi_n \end{vmatrix} = \Delta_1 \xi_1 + \Delta_2 \xi_2 + \ldots + \Delta_n \xi_n.$$

Так как первые $n-1$ столбцов определителя линейно независимы, среди алгебраических дополнений Δ_j по крайней мере одно не равно нулю. Положим $b = \Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \ldots + \Delta_n e_n$. Имеем $(b, a_j) =$

$$\Delta_1 \alpha_{1j} + \Delta_2 \alpha_{2j} + \ldots + \Delta_n \alpha_{nj} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1j} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nj} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $b \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}^{\perp} = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle^{\perp}$. Матрица перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ есть

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & \Delta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & \Delta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & \Delta_n \end{pmatrix},$$ ее определитель

$|T| = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 > 0$, поэтому базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ одинаково ориентированы. Далее, $b^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$. Вычислим

$$|T^{\top} \cdot T| = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_{n-1}) & 0 \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_{n-1}) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{n-1}, a_1) & (a_{n-1}, a_2) & \ldots & (a_{n-1}, a_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 \end{vmatrix}.$$ Таким

образом, $|T|^2 = |T^{\top} \cdot T| = g_{(a_1, \ldots, a_{n-1})} b^2 = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}^2 b^2$. Так как $|T| = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2 = b^2$, заключаем, что $b^2 = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}^2$, т.е. $|b| = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$.

Единственность вектора b вытекает из того, что в одномерном пространстве существует точно два (противоположных) вектора одной и той же ненулевой длины, а условие, что базис, содержащий один из них, имеет данную ориентацию, выделяет точно один из этих векторов.$\Uparrow$

Определение

Пусть V – евклидово пространство размерности n, и $(e_1, \dots, e_n)$ – фиксированный ортонормированный базис V, определяющий положительную ориентацию. Если система векторов $(a_1, \dots, a_{n-1})$ пространства V линейно зависима, то *обобщенное векторное произведение* ее векторов равно 0_V. Если система векторов $(a_1, \dots, a_{n-1})$ пространства V линейно независима, то обобщенное векторное произведение ее векторов равно вектору b, построенному в теореме сл.15: $b \in \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle^{\perp}$, $|b| = V_{a_1, \dots, a_{n-1}}$ и базис $(a_1, \dots, a_{n-1}, b)$ положительно ориентирован.
Обозначение: $a_1 \times \dots \times a_{n-1}$.

Вычислять обобщенное векторное произведение векторов $(a_1, \dots, a_{n-1})$ по их координатам ($[a_j]_e = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})^{\top}$, $j = 1, \dots, n-1$) в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ удобно, разлагая символический определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,n-1} & e_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2,n-1} & e_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & e_n \end{vmatrix}$$

по последнему столбцу.

Свойства обобщенного векторного произведения

Предложение

1. Обобщенное векторное произведение антикоммутативно по любой паре аргументов.
2. Обобщенное векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его аргументы линейно зависимы.
3. Обобщенное векторное произведение линейно по любому аргументу.

$\Downarrow$Все перечисленные свойства получаются из определения обобщенного векторного произведения с помощью определителя применением свойств определителя, касающихся его столбцов.$\Uparrow$

Пример

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ вычислить $b = a_1 \times a_2 \times a_3$ для векторов $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 4, 5, 6)$, $a_3 = (2, 3, 5, 4)$.

Запишем символический определитель и разложим его по последнему столбцу:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & e_1 \\ 2 & 4 & 3 & e_2 \\ 3 & 5 & 5 & e_3 \\ 4 & 6 & 4 & e_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_3 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} e_4 = -6e_1 + 10e_2 - 2e_3 - 2e_4.$$
Таким образом, $b = (-6, 10, -2, -2)$.

В 3-мерном евклидовом пространстве V_g обобщенное векторное произведение совпадает с векторным произведением, рассматривавшимся в аналитической геометрии. Мы получаем еще одну формулу для вычисления координат векторного произведения в правом ортонормированном базисе: координаты векторного произведения векторов $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ их векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \vec{e}_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \vec{e}_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$. Этот определитель равен определителю $\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$, с помощью которого вычисляются координаты векторного произведения в аналитической геометрии.