

Глава V. Евклидовы и унитарные пространства

§2. Ортогональность

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Понятие ортогональности обобщает понятие перпендикулярности геометрических векторов на евклидовы и унитарные пространства.

Пусть V – евклидово или унитарное пространство.

Определение

Векторы $x, y \in V$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Обозначение: $x \perp y$.

Очевидно, что $0_V \perp x$ для любого $x \in V$. Также легко проверить, что $x \perp y \implies \alpha x \perp \beta y$ для любых скаляров α, β . Если $\alpha, \beta \neq 0$, то верно и обратное: $\alpha x \perp \beta y \implies x \perp y$.

Определения

Система векторов (a_1, a_2, \dots, a_m) пространства V называется *ортогональной*, если $a_j \perp a_k$ при всех различных $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Ортогональная система, состоящая из ортов, называется *ортонормированной*.

Ортогональная система может содержать нулевой вектор, любая ортонормированная система состоит из ненулевых векторов.

Для любых векторов a_j, a_k ортогональной (соотв. ортонормированной) системы имеет место равенство

$$(a_j, a_k) = \begin{cases} a_j^2 \text{ (соотв. } 1), & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \quad (1)$$

Предложение

Произвольная ортогональная система, состоящая из ненулевых векторов, линейно независима.

↓ Пусть (a_1, a_2, \dots, a_m) – ортогональная система, состоящая из ненулевых векторов. Предположим, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0_V$. Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор a_j , где $1 \leq j \leq m$. В соответствии с утверждением (1) сл.3 получим $\lambda_j a_j^2 = 0$. Так как $a_j \neq 0_V$, имеем $a_j^2 > 0$, откуда $\lambda_j = 0$. Это справедливо для всех $1 \leq j \leq m$, поэтому система (a_1, a_2, \dots, a_m) линейно независима. ↑

Следствие

Произвольная ортонормированная система векторов линейно независима.

Определения

Базис подпространства, являющийся ортогональной (соотв. ортонормированной) системой векторов, называется *ортогональным* (соотв. *ортонормированным*) базисом.

Процесс нахождения векторов системы (b_1, b_2, \dots, b_m) по векторам системы (a_1, a_2, \dots, a_m) , описанный в доказательстве следующей теоремы, называется *процесс ортогонализации Грама-Шмидта*.

Теорема

Для любой линейно независимой системы векторов (a_1, a_2, \dots, a_m) существует такая ортогональная система из ненулевых векторов (b_1, b_2, \dots, b_m) что $\langle a_1 \rangle = \langle b_1 \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$, \dots , $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$.

↓ Используем индукцию по m . Положим $b_1 = a_1$ и будем искать b_2 в виде $a_2 + \gamma b_1$ для некоторого скаляра γ . Из условия $b_2 \perp b_1$ имеем $0 = (b_2, b_1) = (a_2 + \gamma b_1, b_1) = (a_2, b_1) + \gamma(b_1, b_1)$, откуда $(a_2, b_1) + \gamma(b_1, b_1) = 0$. Так как $a_1 \neq 0_V$ в силу линейной независимости системы векторов (a_1, a_2, \dots, a_m) , имеем $(b_1, b_1) > 0$ и $\gamma = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$. Следовательно, вектор b_2 определен однозначно и $b_2 \neq 0_V$ в силу линейной независимости системы (a_1, a_2, \dots, a_m) . Из определения векторов b_1, b_2 следует, что $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$. База индукции установлена.

Шаг индукции. Предположим, что уже построена ортогональная система из ненулевых векторов (b_1, b_2, \dots, b_s) ($1 < s < m$) такая что $\langle a_1 \rangle = \langle b_1 \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$, \dots , $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_s \rangle$. Будем искать вектор b_{s+1} в виде $a_{s+1} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s$ с неопределенными скалярами γ_j ($j \in \{1, \dots, s\}$). Тогда $b_{s+1} \neq 0_V$ в силу линейной независимости системы (a_1, a_2, \dots, a_m) . Из условия $b_{s+1} \perp b_j$ для $j \in \{1, \dots, s\}$, учитывая равенство (1) сл.3, получаем

$$0 = (b_{s+1}, b_j) = (a_{s+1} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s, b_j) = (a_{s+1}, b_j) + \gamma_j (b_j, b_j),$$

откуда $\gamma_j = -\frac{(a_{s+1}, b_j)}{(b_j, b_j)}$ ($j \in \{1, \dots, s\}$). Следовательно, вектор b_{s+1} определен однозначно.

Покажем, что $\langle a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1} \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1} \rangle$. Так как $\langle b_1, b_2, \dots, b_s \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$ и $b_{s+1} = a_{s+1} + \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s$, заключаем, что $\langle b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1} \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1} \rangle$. Противоположное включение следует из включения $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \dots, b_s \rangle$ и равенства $a_{s+1} = b_{s+1} - \gamma_1 b_1 - \dots - \gamma_s b_s$. Шаг индукции доказан. \uparrow

Процесс ортогонализации можно применять и к линейно зависимой системе векторов (см. сл.18). При этом если система (a_1, a_2, \dots, a_s) линейно независима и $(a_1, a_2, \dots, a_s) \vdash a_{s+1}$, то получается ортогональная система (b_1, b_2, \dots, b_s) и $b_{s+1} = 0_V$. Нулевые векторы нужно отбрасывать, как и соответствующие векторы из системы (a_1, a_2, \dots, a_m) .

Найти ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ из \mathbb{R}^4 , где $a_1 = (1, -3, 2, 1)$, $a_2 = (-1, 7, -3, -2)$, $a_3 = (2, -2, 3, 1)$.

Положим $b_1 = a_1$. Ищем $b_2 = a_2 + \gamma b_1$. Вычисляем $b_1^2 = 1 + 10 + 4 + 1 = 15$, $(a_2, b_1) = -1 - 21 - 6 - 2 = -30$. Находим $\gamma = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{-30}{15} = 2$.

Следовательно, $b_2 = a_2 + 2b_1 = (-1, 7, -3, -2) + 2(1, -3, 2, 1) = (1, 1, 1, 0)$.
Проверяем: $(b_2, b_1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

Ищем $b_3 = a_3 + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2$. Вычисляем $b_2^2 = 1 + 1 + 1 = 3$, $(a_3, b_1) = 2 + 6 + 6 + 1 = 15$, $(a_3, b_2) = 2 - 2 + 3 = 3$. Находим

$\gamma_1 = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{15}{15} = -1$, $\gamma_2 = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{3}{3} = -1$. Следовательно,

$b_3 = a_3 - b_1 - b_2 = (2, -2, 3, 1) - (1, -3, 2, 1) - (1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Таким образом, $(a_1, a_2) \perp a_3$, поскольку $a_3 = b_1 + b_2 = b_1 + a_2 + 2b_1 = 3b_1 + a_2 = 3a_1 + a_2$. Мы видим, что $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle$ и ортогональный базис этого подпространства состоит из векторов b_1, b_2 .

Применяя процесс ортогонализации к произвольному базису евклидова или унитарного линейного пространства, получаем ортогональный базис. Таким образом, справедливо

Следствие

Произвольное ненулевое конечномерное евклидово или унитарное линейное пространство имеет ортогональный базис и ортонормированный базис.

Ортонормированный базис получается из ортогонального базиса путем нормирования каждого вектора (сл.8 §1).

Пусть $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – ортогональный базис евклидова или унитарного линейного пространства V и $x \in V$. С помощью скалярного произведения можно найти координаты $[x]_B$. Пусть $x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \dots + \xi_n b_n$. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор b_j , где $1 \leq j \leq n$. С учетом равенства (1) сл.3 получаем $(x, b_j) = \xi_j (b_j, b_j)$. Таким образом,

$$\xi_j = \frac{(x, b_j)}{(b_j, b_j)} (j = 1, \dots, n).$$

Для ортонормированного базиса $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ евклидова или унитарного линейного пространства V координаты вектора $x \in V$ в этом базисе $[x]_C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$ вычисляются по формулам

$$\gamma_j = (x, c_j) (j = 1, \dots, n).$$

Определение

Пусть M – подмножество евклидова или унитарного линейного пространства V . **Ортогональным дополнением** множества M называется множество $\{x \in V | x \perp u \forall u \in M\}$. Обозначение: M^\perp .

В евклидовом пространстве V_g для вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ справедливо равенство $\{\vec{a}\}^\perp = V_\pi$, где π – плоскость, перпендикулярная к вектору \vec{a} . Для неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ имеет место равенство $\{\vec{a}, \vec{b}\}^\perp = V_\ell$, где ℓ – прямая, перпендикулярная к векторам \vec{a}, \vec{b} .

Из определения непосредственно следует, что $M \subseteq N \implies N^\perp \subseteq M^\perp$.
Очевидно также, что $V^\perp = \{0_V\}$ (поскольку $\forall x \in V^\perp x \perp x$) и $\{0_V\}^\perp = V$.

Предложение

- 1 Для любого подмножества $M \subseteq V$ его ортогональное дополнение M^\perp является подпространством в V .
- 2 Для любой системы (a_1, a_2, \dots, a_m) векторов из V справедливо равенство $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}^\perp = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle^\perp$.

↓ Для доказательства утверждения 1 используем предложение сл.3 §4 гл.1. Очевидно, $0_V \in M^\perp$. Пусть $x, y \in M^\perp$. Тогда $\forall u \in M$ $x \perp u$ и $y \perp u$, т.е. $(x, u) = 0$ и $(y, u) = 0$. Следовательно, $(x + y, u) = (x, u) + (y, u) = 0$, и потому $(x + y) \perp u \forall u \in M$. Таким образом, $x + y \in M^\perp$. Для любого скаляра α имеем $\alpha x \perp u$, поэтому $\alpha x \in M^\perp$. Итак, M^\perp – подпространство. Докажем утверждение 2. Так как $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, имеем $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle^\perp \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_m\}^\perp$. Установим противоположное включение. Пусть $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}^\perp$ и $u \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$. Тогда $x \perp a_j$, т.е. $(x, a_j) = 0$ при $j = 1, \dots, m$, и $u = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$. Далее, $(x, u) = (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m) = \overline{\lambda_1}(x, a_1) + \overline{\lambda_2}(x, a_2) + \dots + \overline{\lambda_m}(x, a_m) = 0$, так как $(x, a_j) = 0$ при $j = 1, \dots, m$. Таким образом, $x \perp u$ и $x \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle^\perp$. Итак, $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}^\perp \subseteq \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle^\perp$. ↑

Найти базис ортогонального дополнения к подпространству $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где $a_1 = (1, 2, 2, 1)$, $a_2 = (3, 2, 2, 3)$, $a_3 = (1, 5, 5, 1)$.

В силу утверждения 2 предложения сл.10

$U^\perp = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle^\perp = \{a_1, a_2, a_3\}^\perp$. Для любого $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ условие $x \in \{a_1, a_2, a_3\}^\perp$ равносильно системе условий $x \perp a_j$ ($j = 1, 2, 3$), откуда $(a_j, x) = 0$. Получаем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Решаем систему методом Гаусса-Жордана:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Находим общее решение: } \begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -x_3. \end{cases} \quad \text{Записываем}$$

фундаментальную систему решений:
$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{Базис}$$

ортогонального дополнения U^\perp : $b_1 = (0, -1, 1, 0)$, $b_2 = (-1, 0, 0, 1)$.

Теорема

Пусть U – конечномерное подпространство евклидова или унитарного пространства V . Тогда $V = U \oplus U^\perp$.

↓ Если $U = \{0_V\}$, то $U^\perp = V$ и доказывать нечего. Пусть $\dim U = k$. Выберем в U ортонормированный базис (e_1, \dots, e_k) . Покажем, что $V = U + U^\perp$. Для любого $x \in V$ запишем $x = u + u_1$ с неизвестными $u \in U$, $u_1 \in U^\perp$. Имеем $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$, где λ_j – неизвестные скаляры, и $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + u_1$. Умножив скалярно обе части последнего равенства на вектор e_j ($j = 1, \dots, k$), получим $(x, e_j) = \lambda_j$, так как $u_1 \perp e_j$ и (e_1, \dots, e_k) – ортонормированный базис. Теперь положим $u = \sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j$ и $u_1 = x - u$. Очевидно, $u \in U$. Покажем, что $u_1 \in U^\perp$. Так как $(u, e_j) = (\sum_{j=1}^k (x, e_j) e_j, e_j) = (x, e_j)$, имеем $(u_1, e_j) = (x - u, e_j) = (x, e_j) - (u, e_j) = 0$. Следовательно, $u_1 \in \{e_1, \dots, e_k\}^\perp = \langle e_1, \dots, e_k \rangle^\perp = U^\perp$ в силу утверждения 2 предложения сл.10. Таким образом, $V = U + U^\perp$. Очевидно, что $U \cap U^\perp = \{0_V\}$. Применение теоремы сл.19 §4 гл.I завершает доказательство. ↑

Ортогональные компонента и составляющая вектора относительно подпространства

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство, U – подпространство V . Согласно теореме сл.13 $V = U \oplus U^\perp$. Для любого вектора $x \in V$ существуют однозначно определенные векторы $y \in U$ и $z \in U^\perp$ такие что $x = y + z$.

Определение

Вектор y называется *ортогональной компонентой*, а вектор z – *ортогональной составляющей* вектора $x \in V$ относительно подпространства U .

Доказательство теоремы сл.13 фактически содержит алгоритм нахождения ортогональных компоненты и составляющей вектора относительно подпространства. При этом в подпространстве достаточно выбрать какой-то базис, не обязательно ортонормированный.

Определение

Углом между ненулевым вектором x и ненулевым подпространством U евклидова пространства V называется угол между вектором x и его ортогональной компонентой y на U , если $y \neq 0_V$, и угол $\frac{\pi}{2}$, если $y = 0_V$.

Пример нахождения ортогональных компоненты и составляющей вектора

Найти ортогональные компоненту и составляющую вектора $x = (1, 0, 2, -2)$ относительно подпространства $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, где $a_1 = (1, -1, 1, 0)$ и $a_2 = (2, -1, 0, 1)$ в арифметическом пространстве \mathbb{R}^4 .
Определить угол между вектором x и подпространством U .

Будем искать ортогональную компоненту y в виде $y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$.

Запишем $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + z$, где $z \in U^\perp$. Умножив это равенство

скалярно на a_1 и a_2 , получим $(x, a_1) = \lambda_1 (a_1, a_1) + \lambda_2 (a_2, a_1)$ и

$(x, a_2) = \lambda_1 (a_1, a_2) + \lambda_2 (a_2, a_2)$. Вычислим скалярные произведения:

$(x, a_1) = 3$, $(x, a_2) = 0$, $(a_1, a_1) = 3$, $(a_2, a_2) = 6$, $(a_1, a_2) = 3$. Получаем

систему линейных уравнений $\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3, \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0. \end{cases}$ Решив эту систему,

находим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Таким образом, $y = 2a_1 - a_2 = (0, -1, 2, -1)$ и

$z = x - y = (1, 1, 0, -1)$. Делаем проверку: $(z, a_1) = 0$, $(z, a_2) = 0$.

Находим угол: $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{6}{\sqrt{9}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Предложение

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство, U_1, U_2 – подпространства V . Тогда имеют место следующие утверждения:

- ❶ $(U_1^\perp)^\perp = U_1$;
- ❷ $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$;
- ❸ $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

↓ Для доказательства утверждения 1 заметим, что $U_1 \subseteq (U_1^\perp)^\perp$ и $V = U_1 \oplus U_1^\perp$, $V = U_1^\perp \oplus (U_1^\perp)^\perp$, откуда в силу утверждения 2 теоремы сл.19 §4 гл.I получаем $\dim U_1 + \dim U_1^\perp = \dim U_1^\perp + \dim (U_1^\perp)^\perp$ и $\dim U_1 = \dim (U_1^\perp)^\perp$. Теорема сл.6 §4 гл.I дает равенство $(U_1^\perp)^\perp = U_1$.

Докажем утверждение 2. Так как $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$, имеем $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Докажем противоположное включение. Пусть $x \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Тогда $x \perp u_1$, $x \perp u_2$ для любых векторов $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Так как $(x, u_1 + u_2) = (x, u_1) + (x, u_2) = 0$, заключаем, что $x \perp (u_1 + u_2)$ и $x \in (U_1 + U_2)^\perp$. Утверждение 2 доказано.

Выведем утверждение 3 из предыдущих:

$$(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2, \text{ откуда}$$

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = ((U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp. \uparrow$$

Найти ортогональное дополнение к подпространству, заданному однородной системой линейных уравнений в матричном виде $A \cdot x = O$.

Обозначим строки матрицы A через a_1, \dots, a_k . Тогда пространство решений данной системы является ортогональным дополнением $\{a_1, \dots, a_k\}^\perp = \langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp$ и его ортогональное дополнение есть $(\langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp)^\perp = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ – подпространство, порожденное строками матрицы A .

Предложение

Пусть к системе векторов (a_1, \dots, a_m) евклидова или унитарного пространства V применяется процесс ортогонализации (сл.5-6). Если эта система линейно независима, то получается ортогональная система (b_1, \dots, b_m) , которая помимо свойств, указанных в теореме сл.5, обладает еще такими свойствами. При $j = 2, \dots, m$ вектор b_j является ортогональной составляющей вектора a_j относительно подпространства $\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle$. Если система (a_1, \dots, a_m) линейно зависима и j – наименьший индекс, для которого $a_1, \dots, a_{j-1} \vdash a_j$, то $b_j = 0_V$.

↓ Пусть система (a_1, \dots, a_m) линейно независима и $2 \leq j \leq m$. По теореме сл.5 имеем $\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle = \langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle$. Так как $b_j = a_j + \gamma_{j1}b_1 + \dots + \gamma_{j,j-1}b_{j-1}$ и $b_j \perp b_k$ при $j = 1, \dots, j-1$, заключаем, что $b_j \in \{b_1, \dots, b_{j-1}\}^\perp = \langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle^\perp = \langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle^\perp$. Поскольку $a_j = -(\gamma_{j1}b_1 + \dots + \gamma_{j,j-1}b_{j-1}) + b_j$, по определению b_j является ортогональной составляющей вектора a_j относительно подпространства $\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle$.

Пусть j – наименьший индекс, для которого $a_1, \dots, a_{j-1} \vdash a_j$. Если $j = 1$, то $a_1 = 0_V$ и $b_1 = a_1$, так что доказывать нечего. При $j > 1$ имеем $\langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle = \langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle$. Таким образом, $a_j \in \langle a_1, \dots, a_{j-1} \rangle = \langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle$. Для любых скаляров $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}$ справедливо включение $a_j + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{j-1} b_{j-1} \in \langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle$. По построению вектора b_j имеем $b_j \in \langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle$, но этот вектор должен принадлежать $\langle b_1, \dots, b_{j-1} \rangle^\perp$, откуда $b_j = 0_V$.
Предложение доказано. \uparrow

Дополняемость ортогональных и ортонормированных систем до ортогональных и ортонормированных базисов

Предложение

Пусть V – евклидово или унитарное пространство, $\dim V = n > 1$, $B = (b_1, \dots, b_k)$ ($1 \leq k < n$) – ортогональная система из ненулевых векторов (соотв. ортонормированная система) из V . Тогда B можно дополнить до ортогонального (соотв. ортонормированного) базиса пространства V .

↓ Положим $U = \langle B \rangle$. В силу предложения и следствия сл.4 система B линейно независима, поэтому $\dim U = k$ и $\dim U^\perp = n - k > 0$. Выберем в U^\perp ортогональный (соотв. ортонормированный) базис $C = (c_1, \dots, c_{n-k})$. Тогда система $(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_{n-k})$ будет ортогональным (соотв. ортонормированным) базисом пространства V . ↑

Пример дополнения ортонормированной системы до ортонормированного базиса

Пример

Убедиться, что система из векторов $a_1 = \frac{1}{5}(1, 2, 4, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{5}(2, -1, -2, 4)$ является ортонормированной и дополнить ее до ортонормированного базиса арифметического пространства \mathbb{R}^4 .

Легко проверить, что $|a_1| = |a_2| = 1$ и $(a_1, a_2) = 0$. Найдем базис ортогонального дополнения $\langle a_1, a_2 \rangle^\perp$ (см. сл.12).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда $x_1 = -2x_4$, $x_2 = -2x_3$ и базис подпространства $\langle a_1, a_2 \rangle^\perp$ состоит из векторов $b_1 = (0, -2, 1, 0)$ и $b_2 = (-2, 0, 0, 1)$. Эти векторы

ортогональны, поэтому остается их нормировать: $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1, 0)$,

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 0, 1)$. Векторы c_1, c_2 дополняют систему a_1, a_2 до ортонормированного базиса арифметического пространства \mathbb{R}^4 .

В случае, если векторы b_1, b_2 получаются не ортогональными, к ним следует применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта, и затем нормировать полученные векторы.

Следующее утверждение обобщает теорему Пифагора, справедливую для перпендикулярных векторов из пространства V_g , на ортогональные векторы произвольного евклидова или унитарного пространства.

Предложение

Пусть V – евклидово или унитарное пространство, $x, y \in V$ и $x \perp y$. Тогда

$$|x + y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

↓ Заметим, что $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2$, так как $(x, y) = (y, x) = 0$. ↑