Глава V. Евклидовы и унитарные пространства
§1. Понятие линейного пространства со скалярным произведением

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

В произвольном линейном пространстве определены операции сложения векторов и умножения векторов на скаляр. В этой теме рассматриваются пространства, в которых дополнительно определено скалярное произведение, которое в частности позволяет вычислять длины векторов и определять углы между векторами.

Напомним, что через $\overline{\alpha}$ обозначается число, комплексно сопряженное с комплексным числом α (сл.8 §2 гл.II ОА).

Определение

Евклидовым (соотв. *унитарным*) называется линейное пространство V над полем действительных (соотв. комплексных) чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\forall x, y \in V\ \exists!\, \alpha \in \mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$) Число α называется *скалярным произведением* векторов x и y и обозначается через (x, y).
2. $\forall x, y \in V\ \ (y, x) = \overline{(x, y)}$, в частности, $(y, x) = (x, y)$ в евклидовом пространстве.
3. $\forall x, y, z \in V\ \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
4. $\forall x, y \in V\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.
5. $\forall x \in V\ \ (x, x) \in \mathbb{R}$ и $(x, x) > 0$ в случае, когда $x \neq 0_V$.

Скалярное произведение на евклидовом (соотв. унитарном) пространстве является функцией из $V \times V$ в $\mathbb{R}$ (соотв. в $\mathbb{C}$).
Для скалярного произведения (x, x) используется обозначение x^2 и название *скалярный квадрат* вектора x.

Геометрические векторы

Евклидовыми пространствами (относительно скалярного произведения, определяемого в аналитической геометрии) являются пространства V_g, V_π для любой плоскости π и V_ℓ для любой прямой ℓ (сл.5 §1 гл.I.)

Это непосредственно следует из свойств скалярного произведения геометрических векторов.

Арифметическое евклидово пространство

Евклидовым пространством является $\mathbb{R}^n$ относительно скалярного произведения, заданного формулой $(x, y) = x \cdot y^\top$.

В развернутом виде скалярное произведение определено так: для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$.
Аксиомы 1 и 2 евклидова пространства выполняются очевидным образом.
Аксиомы 3 и 4 следуют из свойств операций над матрицами: $(x + y, z) = (x + y) \cdot z^\top = x \cdot z^\top + y \cdot z^\top = (x, z) + (y, z)$ и $(\lambda x, y) = (\lambda x) \cdot y^\top = \lambda(x \cdot y^\top) = \lambda(x, y)$.
Аксиома 5: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 \in \mathbb{R}$ и $x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists j : \xi_j \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$.

Примеры евклидовых пространств (1)

Пространства непрерывных функций

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha < \beta$. На пространстве $C[\alpha, \beta]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$, определяется скалярное произведение $(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$. Относительно этого скалярного произведения $C[\alpha, \beta]$ является евклидовым пространством.

Все аксиомы евклидова пространства проверяются с помощью свойств определенного интеграла и непрерывных функций, известных из курса математического анализа. Почему из того, что $f(x) \not\equiv 0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, следует $\int_\alpha^\beta f(x)^2 dx > 0$?

Многочлены

Линейные пространства $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами и $VP_n(\mathbb{R})$ всех таких многочленов, степень которых не превосходит n, являются евклидовыми пространствами относительно скалярного произведения, определенного в предыдущем примере.

Примеры унитарных пространств

Для матрицы $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{k\times n}$ обозначим через $\overline{A}$ матрицу $(\overline{\alpha}_{ij})$, состоящую из чисел, комплексно сопряженных с элементами матрицы A.

Арифметическое унитарное пространство

Унитарным пространством является $\mathbb{C}^n$ относительно скалярного произведения, заданного формулой $(x, y) = x \cdot \overline{y}^{\top}$.

В развернутом виде скалярное произведение определено так: для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ $(x, y) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + \xi_n\overline{\eta}_n$.
Аксиома 1 очевидна. Аксиома 2: $(y, x) = \eta_1\overline{\xi}_1 + \eta_2\overline{\xi}_2 + \ldots + \eta_n\overline{\xi}_n$; $\overline{(x, y)} = \overline{\xi_1\overline{\eta}_1 + \xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + \xi_n\overline{\eta}_n} = \overline{\xi_1\overline{\eta}_1} + \overline{\xi_2\overline{\eta}_2} + \ldots + \overline{\xi_n\overline{\eta}_n} =$
$\overline{\xi}_1\overline{\overline{\eta}}_1 + \overline{\xi}_2\overline{\overline{\eta}}_2 + \ldots + \overline{\xi}_n\overline{\overline{\eta}}_n = \overline{\xi}_1\eta_1 + \overline{\xi}_2\eta_2 + \ldots + \overline{\xi}_n\eta_n = (y, x)$.
Аксиомы 3 и 4 следуют из свойств операций над матрицами: $(x + y, z) = (x + y) \cdot \overline{z}^{\top} = x \cdot \overline{z}^{\top} + y \cdot \overline{z}^{\top} = (x, z) + (y, z)$ и $(\lambda x, y) = (\lambda x) \cdot \overline{y}^{\top} = \lambda(x \cdot \overline{y}^{\top}) = \lambda(x, y)$.
Аксиома 5: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $(x, x) = \xi_1\overline{\xi}_1 + \xi_2\overline{\xi}_2 + \ldots + \xi_n\overline{\xi}_n \in \mathbb{R}$ и $x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists j : \xi_j \neq 0 \Rightarrow \xi_j\overline{\xi}_j > 0 \Rightarrow (x, x) > 0$.

Предложение

В произвольном евклидовом или унитарном пространстве V справедливы следующие утверждения:

1. $\forall x, y, z \in V \ (x, y+z) = (x, y) + (x, z)$
2. $\forall x, y \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$.
3. $\forall x \in V \ (0_V, x) = (x, 0_V) = 0$.
4. $\forall x \in V \ x = 0_V \Leftrightarrow x^2 = 0$.

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1:
$(x, y+z) = \overline{(y+z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$.
Аналогично доказывается утверждение 2:
$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha (y, x)} = \overline{\alpha}\,\overline{(y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)$.
Для доказательства утверждения 3 заметим, что
$(0_V, x) = (0 \cdot 0_V, x) = 0(0_V, x) = 0$ и $(x, 0_V) = \overline{(0_V, x)} = \overline{0} = 0$.
Утверждение 4 вытекает из утверждения 3 и аксиомы 5. $\Uparrow$
Вычисления со скалярным произведением в евклидовом пространстве можно проводить по обычным правилам раскрытия скобок и вынесения скаляров, а в унитарном при выполнении преобразований следует помнить, что скаляр из второго аргумента скалярного произведения выносится комплексно сопряженным.

Определение

Длиной вектора x евклидова или унитарного пространства V называется число $\sqrt{x^2}$. Обозначение: $|x|$.

По определению $|x| \geq 0$. Далее, $x^2 = |x|^2$. Из утверждения 4 предложения сл.7 следует, что $x = 0_V \Leftrightarrow |x| = 0$.

Лемма

Для любого $x \in V$ и любого скаляра α имеет место равенство $|\alpha x| = |\alpha||x|$.

$\Downarrow$ Имеем $|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}\sqrt{(x, x)} = |\alpha||x|$, поскольку $\sqrt{\alpha\overline{\alpha}} = |\alpha|$. $\Uparrow$

Определение

Ортом называется вектор, длина которого равна 1.
Ортом вектора $x \neq 0_V$ называется вектор $e_x = \frac{1}{|x|}x$.

В самом деле, $|e_x| = |\frac{1}{|x|}x| = \frac{1}{|x|}|x| = 1$.

Нахождение орта вектора x называется *нормированием* вектора x.

Вычислить в унитарном пространстве $(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v)$.

$(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v) = (\alpha x, \gamma u) + (\beta y, \gamma u) + (\alpha x, \delta v) + (\beta y, \delta v) = \alpha\overline{\gamma}(x, u) + \beta\overline{\gamma}(y, u) + \alpha\overline{\delta}(x, v) + \beta\overline{\delta}(y, v)$.

Найти длины векторов и их орты для векторов арифметических пространств $a = (1, 2, 2, 0)$, $b = (1 + i, i, 3, 2 - 3i)$.

Имеем $|a| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, $e_a = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.
Для вектора b вычислим $b^2 = (1 + i)\overline{1 + i} + i\overline{i} + 9 + (2 - 3i)\overline{2 - 3i} = (1 + i)(1 - i) + i(-i) + 9 + (2 - 3i)(2 + 3i) = 2 + 1 + 9 + 13 = 25$. Следовательно, $|b| = 5$ и $e_b = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i, \frac{1}{5}i, \frac{3}{5}, \frac{2}{5} - \frac{3}{5}i\right)$.

Найти скалярное произведение векторов $a = (1 + i, 2 - 3i, 3 + 5i, 2 - 3i)$ и $b = (1 + 3i, 3 - 2i, 5 + 3i, 2 - 7i)$.

Имеем

$$(a, b) = (1 + i)\overline{1 + 3i} + (2 - 3i)\overline{3 - 2i} + (3 + 5i)\overline{5 + 3i} + (2 - 3i)\overline{2 - 7i} =$$
$$= (1 + i)(1 - 3i) + (2 - 3i)(3 + 2i) + (3 + 5i)(5 - 3i) + (2 - 3i)(2 + 7i) =$$
$$= 4 - 2i + 12 - 5i + 30 + 16i + 25 + 8i = 71 + 17i.$$

Теорема

Если векторы x, y евклидова или унитарного пространства V линейно независимы, то $|(x,y)| < |x||y|$; если векторы x, y линейно зависимы, то $|(x,y)| = |x||y|$ и во всех случаях $|(x,y)| \leq |x||y|$.

$\Downarrow$ Пусть векторы x, y линейно зависимы. Тогда один из них линейно выражается через другой. Пусть $y = \alpha x$ для некоторого скаляра α (случай $x = \alpha y$ рассматривается аналогично). Тогда $|(x,y)| = |(x, \alpha x)| = |\overline{\alpha}(x,x)| = |\overline{\alpha}||(x,x)| = |\alpha|x^2$. Согласно лемме сл.8 имеем $|x||y| = |x||\alpha x| = |x||\alpha||x| = |\alpha||x|^2 = |\alpha|x^2$, т.е. $|(x,y)| = |x||y|$.

Предположим, что векторы x, y линейно независимы. Тогда $x, y \neq 0_V$. Положим $z = x + \alpha y$, где α – произвольный скаляр. Тогда $z \neq 0_V$ и $z^2 > 0$. Вычислим $(z,z) = (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x,x) + (\alpha y, x) + (x, \alpha y) + (\alpha y, \alpha y) = (x,x) + \alpha(y,x) + \overline{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{\alpha}(y,y)$. Так как $y \neq 0_V$, имеем $(y,y) > 0$. Возьмем $\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$. Тогда $0 < (x,x) - \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x) - \frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(x,y) + \frac{(x,y)}{(y,y)}\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(y,y) =$ $= (x,x) - \frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)}$. Так как $(y,x) = \overline{(x,y)}$ и $(x,y)\overline{(x,y)} = |(x,y)|^2$, заключаем, что $(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} > 0$, откуда $|(x,y)|^2 < (x,x)(y,y)$. Извлекая из обеих частей последнего неравенства квадратный корень, получаем $|(x,y)| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889).
Неравенство $|(x, y)| \leq |x||y|$ носит имена Коши и Буняковского. Для каждого конкретного евклидова или унитарного пространства имеется своя конкретная форма этого неравенства.
В частности, для арифметических евклидовых или унитарных пространств получаются следующие неравенства.

Случай пространства $\mathbb{R}^n$

Для любых действительных чисел α_j, β_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2}.$$

Случай пространства $\mathbb{C}^n$

Для любых комплексных чисел α_j, β_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2}.$$

А для евклидова пространства непрерывных функций из примера сл.5 справедливо неравенство

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2dx}.$$

Следствие

Для любых векторов x, y евклидова или унитарного пространства имеет место неравенство $|x+y| \leq |x| + |y|$; если векторы x, y линейно независимы, то $|x+y| < |x| + |y|$.

$\Downarrow$ Поскольку число $|x+y|^2$ совпадает со своим модулем и $|(x,y)| = |(y,x)|$, имеем $|x+y|^2 = |(x+y, x+y)| = |(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)| \leq (x,x) + |(x,y)| + |(y,x)| + (y,y) = |x|^2 + 2|(x,y)| + |y|^2$. Так как в силу теоремы сл.10 $|(x,y)| \leq |x||y|$ и в случае, когда векторы x, y линейно независимы, неравенство строгое, заключаем, что $|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ (соответственно $|x+y|^2 < (|x| + |y|)^2$) откуда непосредственно вытекает требуемое утверждение. $\Uparrow$

Неравенство $|x+y| \leq |x| + |y|$ называется неравенством Минковского или неравенством треугольника.

В еклидовом пространстве неравенство Коши-Буняковского позволяет определить понятие угла между векторами. Вспоминая определение скалярного произведения ненулевых геометрических векторов $\vec{a}\vec{b} = ab\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$, попытаемся определить угол между ненулевыми векторами x, y евклидова пространства V как число $\widehat{(x,y)}$ такое что $0 \leq \widehat{(x,y)} \leq \pi$ и

$$\cos\widehat{(x,y)} = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

Правая часть этого равенства по модулю не превосходит 1 в силу неравенства Коши-Буняковского, поэтому такое определение корректно.

Определение

Углом между ненулевыми векторами x, y евклидова пространства называется число

$$\widehat{(x,y)} = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

В унитарном пространстве угол между векторами не определяется.

Пример

Вычислить угол между векторами $a = (1, 1, 1, 1)$ и $b = (2, 6, 0, -3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

Имеем $(a, b) = 5$, $|a| = 2$, $|b| = 7$. Таким образом, $\cos \widehat{(a, b)} = \frac{5}{14}$ и $\widehat{(a, b)} = \arccos \frac{5}{14}$. В подобных задачах ответ можно оставить в таком виде, не вычисляя угол приближенно.