

# Глава V. Евклидовы и унитарные пространства

## §1. Понятие линейного пространства со скалярным произведением

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Линейная алгебра для направлений  
Механика и математическое моделирование и  
Прикладная математика  
(2 семестр)

В произвольном линейном пространстве определены операции сложения векторов и умножения векторов на скаляр. В этой теме рассматриваются пространства, в которых дополнительно определено скалярное произведение, которое в частности позволяет вычислять длины векторов и определять углы между векторами.

Напомним, что через  $\bar{\alpha}$  обозначается число, комплексно сопряженное с комплексным числом  $\alpha$  (сл.8 §2 гл.II ОА).

## Определение

**Евклидовым** (соотв. **унитарным**) называется линейное пространство  $V$  над полем действительных (соотв. комплексных) чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1  $\forall x, y \in V \exists! \alpha \in \mathbb{R}$  (соотв.  $\mathbb{C}$ ) Число  $\alpha$  называется **скалярным произведением** векторов  $x$  и  $y$  и обозначается через  $(x, y)$ .
- 2  $\forall x, y \in V (y, x) = \overline{(x, y)}$ , в частности,  $(y, x) = (x, y)$  в евклидовом пространстве.
- 3  $\forall x, y, z \in V (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ .
- 4  $\forall x, y \in V \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (соотв.  $\mathbb{C}$ )  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ .
- 5  $\forall x \in V (x, x) \in \mathbb{R}$  и  $(x, x) > 0$  в случае, когда  $x \neq 0_V$ .

Скалярное произведение на евклидовом (соотв. унитарном) пространстве является функцией из  $V \times V$  в  $\mathbb{R}$  (соотв. в  $\mathbb{C}$ ).

Для скалярного произведения  $(x, x)$  используется обозначение  $x^2$  и название **скалярный квадрат** вектора  $x$ .

## Геометрические векторы

Евклидовыми пространствами (относительно скалярного произведения, определяемого в аналитической геометрии) являются пространства  $V_g$ ,  $V_\pi$  для любой плоскости  $\pi$  и  $V_\ell$  для любой прямой  $\ell$  (сл.5 §1 гл.I.)

Это непосредственно следует из свойств скалярного произведения геометрических векторов.

## Арифметическое евклидово пространство

Евклидовым пространством является  $\mathbb{R}^n$  относительно скалярного произведения, заданного формулой  $(x, y) = x \cdot y^T$ .

В развернутом виде скалярное произведение определено так: для  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$   $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n$ . Аксиомы 1 и 2 евклидова пространства выполняются очевидным образом. Аксиомы 3 и 4 следуют из свойств операций над матрицами:  $(x + y, z) = (x + y) \cdot z^T = x \cdot z^T + y \cdot z^T = (x, z) + (y, z)$  и  $(\lambda x, y) = (\lambda x) \cdot y^T = \lambda(x \cdot y^T) = \lambda(x, y)$ .

Аксиома 5:  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \in \mathbb{R}$  и  $x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists j : \xi_j \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$ .

## Пространства непрерывных функций

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha < \beta$ . На пространстве  $C[\alpha, \beta]$  всех функций, непрерывных на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , определяется скалярное произведение  $(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx$ . Относительно этого скалярного произведения  $C[\alpha, \beta]$  является евклидовым пространством.

Все аксиомы евклидова пространства проверяются с помощью свойств определенного интеграла и непрерывных функций, известных из курса математического анализа. Почему из того, что  $f(x) \not\equiv 0$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , следует  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx > 0$ ?

## Многочлены

Линейные пространства  $\mathbb{R}[x]$  всех многочленов с действительными коэффициентами и  $VP_n(\mathbb{R})$  всех таких многочленов, степень которых не превосходит  $n$ , являются евклидовыми пространствами относительно скалярного произведения, определенного в предыдущем примере.

Для матрицы  $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{k \times n}$  обозначим через  $\bar{A}$  матрицу  $(\bar{\alpha}_{ij})$ , состоящую из чисел, комплексно сопряженных с элементами матрицы  $A$ .

## Арифметическое унитарное пространство

Унитарным пространством является  $\mathbb{C}^n$  относительно скалярного произведения, заданного формулой  $(x, y) = x \cdot \bar{y}^\top$ .

В развернутом виде скалярное произведение определено так: для  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$   $(x, y) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n$ .  
Аксиома 1 очевидна. Аксиома 2:  $(y, x) = \eta_1 \bar{\xi}_1 + \eta_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \eta_n \bar{\xi}_n$ ;  $(x, y) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n = \overline{\eta_1 \bar{\xi}_1 + \eta_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \eta_n \bar{\xi}_n} = \overline{(y, x)} = \overline{\eta_1 \bar{\xi}_1 + \eta_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \eta_n \bar{\xi}_n} = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n = (x, y)$ .  
Аксиомы 3 и 4 следуют из свойств операций над матрицами:  $(x + y, z) = (x + y) \cdot \bar{z}^\top = x \cdot \bar{z}^\top + y \cdot \bar{z}^\top = (x, z) + (y, z)$  и  $(\lambda x, y) = (\lambda x) \cdot \bar{y}^\top = \lambda(x \cdot \bar{y}^\top) = \lambda(x, y)$ .  
Аксиома 5:  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $(x, x) = \xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \xi_n \bar{\xi}_n \in \mathbb{R}$  и  $x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists j : \xi_j \neq 0 \Rightarrow \xi_j \bar{\xi}_j > 0 \Rightarrow (x, x) > 0$ .

## Предложение

В произвольном евклидовом или унитарном пространстве  $V$  справедливы следующие утверждения:

- 1  $\forall x, y, z \in V \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
- 2  $\forall x, y \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (соотв.  $\mathbb{C}$ )  $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$ .
- 3  $\forall x \in V \quad (0_V, x) = (x, 0_V) = 0$ .
- 4  $\forall x \in V \quad x = 0_V \Leftrightarrow x^2 = 0$ .

↓ Докажем утверждение 1:

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z).$$

Аналогично доказывается утверждение 2:

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \overline{\alpha}(y, x) = \overline{\alpha}(x, y).$$

Для доказательства утверждения 3 заметим, что

$$(0_V, x) = (0 \cdot 0_V, x) = 0(0_V, x) = 0 \text{ и } (x, 0_V) = \overline{(0_V, x)} = \overline{0} = 0.$$

Утверждение 4 вытекает из утверждения 3 и аксиомы 5. ↑

Вычисления со скалярным произведением в евклидовом пространстве можно проводить по обычным правилам раскрытия скобок и вынесения скаляров, а в унитарном при выполнении преобразований следует помнить, что скаляр из второго аргумента скалярного произведения выносится комплексно сопряженным.

## Определение

**Длиной** вектора  $x$  евклидова или унитарного пространства  $V$  называется число  $\sqrt{x^2}$ . Обозначение:  $|x|$ .

По определению  $|x| \geq 0$ . Далее,  $x^2 = |x|^2$ . Из утверждения 4 предложения сл.7 следует, что  $x = 0_V \Leftrightarrow |x| = 0$ .

## Лемма

Для любого  $x \in V$  и любого скаляра  $\alpha$  имеет место равенство  $|\alpha x| = |\alpha||x|$ .

↓ Имеем  $|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} (x, x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} \sqrt{(x, x)} = |\alpha||x|$ , поскольку  $\sqrt{\alpha \bar{\alpha}} = |\alpha|$ . ↑

## Определение

**Ортом** называется вектор, длина которого равна 1.

**Ортом вектора**  $x \neq 0_V$  называется вектор  $e_x = \frac{1}{|x|}x$ .

В самом деле,  $|e_x| = \left| \frac{1}{|x|}x \right| = \frac{1}{|x|}|x| = 1$ .

Нахождение орта вектора  $x$  называется **нормированием** вектора  $x$ .



Вычислить в унитарном пространстве  $(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v)$ .

$$(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v) = (\alpha x, \gamma u) + (\beta y, \gamma u) + (\alpha x, \delta v) + (\beta y, \delta v) = \alpha \bar{\gamma}(x, u) + \beta \bar{\gamma}(y, u) + \alpha \bar{\delta}(x, v) + \beta \bar{\delta}(y, v).$$

Найти длины векторов и их орты для векторов арифметических пространств  $a = (1, 2, 2, 0)$ ,  $b = (1 + i, i, 3, 2 - 3i)$ .

Имеем  $|a| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ ,  $e_a = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ .

Для вектора  $b$  вычислим  $b^2 = (1 + i)\overline{1 + i} + i\bar{i} + 9 + (2 - 3i)\overline{2 - 3i} = (1 + i)(1 - i) + i(-i) + 9 + (2 - 3i)(2 + 3i) = 2 + 1 + 9 + 13 = 25$ . Следовательно,  $|b| = 5$  и  $e_b = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i, \frac{1}{5}i, \frac{3}{5}, \frac{2}{5} - \frac{3}{5}i\right)$ .

Найти скалярное произведение векторов  $a = (1 + i, 2 - 3i, 3 + 5i, 2 - 3i)$  и  $b = (1 + 3i, 3 - 2i, 5 + 3i, 2 - 7i)$ .

Имеем

$$\begin{aligned} (a, b) &= (1 + i)\overline{1 + 3i} + (2 - 3i)\overline{3 - 2i} + (3 + 5i)\overline{5 + 3i} + (2 - 3i)\overline{2 - 7i} = \\ &= (1 + i)(1 - 3i) + (2 - 3i)(3 + 2i) + (3 + 5i)(5 - 3i) + (2 - 3i)(2 + 7i) = \\ &= 4 - 2i + 12 - 5i + 30 + 16i + 25 + 8i = 71 + 17i. \end{aligned}$$

## Теорема

Если векторы  $x, y$  евклидова или унитарного пространства  $V$  линейно независимы, то  $|(x, y)| < |x||y|$ ; если векторы  $x, y$  линейно зависимы, то  $|(x, y)| = |x||y|$  и во всех случаях  $|(x, y)| \leq |x||y|$ .

↓ Пусть векторы  $x, y$  линейно зависимы. Тогда один из них линейно выражается через другой. Пусть  $y = \alpha x$  для некоторого скаляра  $\alpha$  (случай  $x = \alpha y$  рассматривается аналогично). Тогда  $|(x, y)| = |(x, \alpha x)| = |\overline{\alpha}(x, x)| = |\overline{\alpha}||x, x| = |\alpha|x^2$ . Согласно лемме сл.8 имеем  $|x||y| = |x||\alpha x| = |x||\alpha||x| = |\alpha||x|^2 = |\alpha|x^2$ , т.е.  $|(x, y)| = |x||y|$ .

Предположим, что векторы  $x, y$  линейно независимы. Тогда  $x, y \neq 0_V$ . Положим  $z = x + \alpha y$ , где  $\alpha$  – произвольный скаляр. Тогда  $z \neq 0_V$  и  $z^2 > 0$ .

Вычислим  $(z, z) = (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + (\alpha y, x) + (x, \alpha y) + (\alpha y, \alpha y) = (x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha\overline{\alpha}(y, y)$ . Так как  $y \neq 0_V$ , имеем  $(y, y) > 0$ . Возьмем  $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ . Тогда  $0 < (x, x) - \frac{(x, y)}{(y, y)}(y, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) + \frac{(x, y)}{(y, y)}\frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(y, y) = (x, x) - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)}$ . Так как  $(y, x) = \overline{(x, y)}$  и  $(x, y)\overline{(x, y)} = |(x, y)|^2$ ,

закключаем, что  $(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} > 0$ , откуда  $|(x, y)|^2 < (x, x)(y, y)$ .

Извлекая из обеих частей последнего неравенства квадратный корень, получаем  $|(x, y)| < \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$ , что и требуется доказать. ↑

Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889).

Неравенство  $|(x, y)| \leq |x||y|$  носит имена Коши и Буняковского. Для каждого конкретного евклидова или унитарного пространства имеется своя конкретная форма этого неравенства.

В частности, для арифметических евклидовых или унитарных пространств получаются следующие неравенства.

### Случай пространства $\mathbb{R}^n$

Для любых действительных чисел  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) справедливо неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}.$$

### Случай пространства $\mathbb{C}^n$

Для любых комплексных чисел  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) справедливо неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\beta_j|^2}.$$

А для евклидова пространства непрерывных функций из примера сл.5 справедливо неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx}.$$

### Следствие

Для любых векторов  $x, y$  евклидова или унитарного пространства имеет место неравенство  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ; если векторы  $x, y$  линейно независимы, то  $|x + y| < |x| + |y|$ .

↓ Поскольку число  $|x + y|^2$  совпадает со своим модулем и  $|(x, y)| = |(y, x)|$ , имеем  $|x + y|^2 = |(x + y, x + y)| = |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \leq (x, x) + |(x, y)| + |(y, x)| + (y, y) = |x|^2 + 2|(x, y)| + |y|^2$ . Так как в силу теоремы сл.10  $|(x, y)| \leq |x||y|$  и в случае, когда векторы  $x, y$  линейно независимы, неравенство строгое, заключаем, что  $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$  (соответственно  $|x + y|^2 < (|x| + |y|)^2$ ) откуда непосредственно вытекает требуемое утверждение. ↑

Неравенство  $|x + y| \leq |x| + |y|$  называется неравенством Минковского или неравенством треугольника.

В евклидовом пространстве неравенство Коши-Буняковского позволяет определить понятие угла между векторами. Вспоминая определение скалярного произведения ненулевых геометрических векторов

$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ , попытаемся определить угол между ненулевыми векторами  $x, y$  евклидова пространства  $V$  как число  $\widehat{(x, y)}$  такое что  $0 \leq \widehat{(x, y)} \leq \pi$  и

$$\cos \widehat{(x, y)} = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

Правая часть этого равенства по модулю не превосходит 1 в силу неравенства Коши-Буняковского, поэтому такое определение корректно.

## Определение

**Углом** между ненулевыми векторами  $x, y$  евклидова пространства называется число

$$\widehat{(x, y)} = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

В унитарном пространстве угол между векторами не определяется.

Вычислить угол между векторами  $a = (1, 1, 1, 1)$  и  $b = (2, 6, 0, -3)$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^4$ .

Имеем  $(a, b) = 5$ ,  $|a| = 2$ ,  $|b| = 7$ . Таким образом,  $\cos \widehat{(a, b)} = \frac{5}{14}$  и  $\widehat{(a, b)} = \arccos \frac{5}{14}$ . В подобных задачах ответ можно оставить в таком виде, не вычисляя угол приближенно.