

Глава IX. Аффинные пространства

§ 3. Евклидовы аффинные пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Определение

Аффинное пространство $V = (V, \vec{V}, +)$ над полем действительных чисел \mathbb{R} называется **евклидовым**, если \vec{V} – евклидово пространство.

Тогда V превращается в метрическое пространство путем определения расстояния между точками $p, q \in V$: $\rho(p, q) = |\vec{pq}|$. Проверим аксиомы метрического пространства. Ясно, что $\rho(p, q) \geq 0$, $\rho(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$, $\rho(p, q) = \rho(q, p)$. Так как $|\vec{pr}| = |\vec{pq} + \vec{qr}| \leq |\vec{pq}| + |\vec{qr}|$, заключаем, что $\rho(p, r) \leq \rho(p, q) + \rho(q, r)$.

Примеры: геометрические пространства на плоскости или в пространстве; аффинные арифметические пространства $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}^n}, +)$ над полем \mathbb{R} при $n = 2, 3, \dots$

Пусть U – плоскость в аффинном евклидовом пространстве $(V, \vec{V}, +)$ и $p \in V$.

Определение

Расстоянием от точки p до плоскости U называется $\inf\{\rho(p, r) | r \in U\}$.

Обозначение: $\rho(p, U)$.

Предложение

Пусть $U = q + \vec{U}$ – плоскость, $p \in V$. Тогда $\rho(p, U) = |\vec{z}|$, где \vec{z} – ортогональная составляющая вектора $\vec{p}\vec{q}$ относительно \vec{U} .

↓ Запишем $\vec{p}\vec{q} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$, $\vec{z} \in \vec{U}^\perp$. Возьмем $r \in U$, тогда $r = q + \vec{x}$ для некоторого $\vec{x} \in \vec{U}$. Так как $\vec{p}\vec{r} = \vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{r} = \vec{y} + \vec{z} + \vec{x} = \vec{z} + \vec{u}$, где $\vec{u} = \vec{y} + \vec{x} \in \vec{U}$, имеем $\rho(p, r) = |\vec{p}\vec{r}| = |\vec{z} + \vec{u}|$. Далее, $|\vec{z} + \vec{u}|^2 = (\vec{z} + \vec{u})^2 = \vec{z}^2 + \vec{u}^2 = |\vec{z}|^2 + |\vec{u}|^2$, поскольку $\vec{z} \perp \vec{u}$. Таким образом, $\rho(p, r) = \sqrt{|\vec{z}|^2 + |\vec{u}|^2} \geq |\vec{z}|$ и $\rho(p, r) = |\vec{z}|$ при $\vec{u} = \vec{0}$, т.е. при таком выборе точки r , что $\vec{q}\vec{r} = -\vec{y}$. Предложение доказано. ↑

Определение

Расстоянием между плоскостями U и W евклидова аффинного пространства называется число $\inf\{\rho(p, r) \mid p \in U, r \in W\}$. Обозначение: $\rho(U, W)$.

Предложение

Пусть $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$ – плоскости. Тогда $\rho(U, W) = |\vec{z}|$, где \vec{z} – ортогональная составляющая вектора \vec{pq} относительно подпространства $\vec{U} + \vec{W}$.

↓ Пусть $r \in U$, $s \in W$, т.е. $r = p + \vec{x}$, $s = q + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Тогда $\vec{pr} = \vec{p}\vec{r}$ и $\vec{rs} = \vec{r}\vec{s}$, откуда $\vec{x} + \vec{rs} = \vec{pq} + \vec{y}$. Следовательно, $\vec{rs} = \vec{pq} - \vec{x} + \vec{y}$. Запишем $\vec{pq} = \vec{u} + \vec{z}$, где $\vec{u} \in \vec{U} + \vec{W}$, $\vec{z} \in (\vec{U} + \vec{W})^\perp$. Тогда $\vec{rs} = \vec{u} + \vec{z} - \vec{x} + \vec{y} = \vec{v} + \vec{z}$, где $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x} + \vec{y} \in \vec{U} + \vec{W}$. Имеем $|\vec{rs}|^2 = \vec{rs} \cdot \vec{rs} = (\vec{v} + \vec{z}) \cdot (\vec{v} + \vec{z}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{z} \cdot \vec{z} = |\vec{v}|^2 + |\vec{z}|^2$, поскольку $\vec{v} \perp \vec{z}$.

Значит, $\rho(r, s) = |\vec{rs}| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{z}|^2} \geq |\vec{z}|$. Выбрав точки r, s так, чтобы $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, получим $\rho(r, s) = |\vec{z}|$. Предложение доказано. ↑

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство, $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – репер в нем и базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – ортонормированный. Рассмотрим гиперплоскость U , заданную в этом репере уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$. Вектор \vec{n} с координатами $[\vec{n}] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top$ называется **нормальным вектором** гиперплоскости U . Если записать $U = p + \vec{U}$, то \vec{U} состоит из всех векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Следовательно, $\vec{n} \in \vec{U}^\perp$ и $\vec{U}^\perp = \langle \vec{n} \rangle$.

Предложение

Расстояние от точки $q(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ до гиперплоскости U , заданной уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$, может быть вычислено по

$$\text{формуле } \rho(q, U) = \frac{|\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_n \gamma_n - \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}}.$$

↓ Пусть $p \in U$ и $[p] = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^\top$. Тогда $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n = \beta$. Пусть \vec{z} – ортогональная составляющая вектора $\vec{p}\vec{q}$ относительно \vec{U} . Тогда $\vec{z} = \delta \vec{n}$. Запишем $\vec{p}\vec{q} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$. Умножим это равенство скалярно на вектор \vec{n} : $(\vec{p}\vec{q}, \vec{n}) = (\vec{y}, \vec{n}) + (\vec{z}, \vec{n}) = \delta \vec{n}^2$. Отсюда $\delta = \frac{(\vec{p}\vec{q}, \vec{n})}{\vec{n}^2}$ и $|\vec{z}| = |\delta| |\vec{n}| = \frac{|(\vec{p}\vec{q}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}$. Так как $[\vec{p}\vec{q}] = (\gamma_1 - \beta_1, \dots, \gamma_n - \beta_n)^\top$, имеем $(\vec{p}\vec{q}, \vec{n}) = \alpha_1(\gamma_1 - \beta_1) + \dots + \alpha_n(\gamma_n - \beta_n) = \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_n \gamma_n - (\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n) = \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_n \gamma_n - \beta$, откуда следует требуемое. ↑

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство, $n = \dim V$.

Определения и обозначения

Параллелотопом в аффинном евклидовом пространстве V с вершиной $p \in V$, порожденным линейно независимой системой $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ векторов из \vec{V} ($k \leq n$) называется множество точек

$$\{q \in V \mid q - p = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_k \vec{b}_k, 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, \dots, k\}.$$

Обозначение: $ParTop(p; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$.

Вершинами параллелотопа $ParTop(p; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ называются точки $p + \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_k \vec{b}_k$, где $\lambda_j \in \{0, 1\}$ при $j = 1, \dots, k$.

Количество вершин параллелотопа $ParTop(p; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ равно 2^k .

Формула для объема этого параллелотопа получается из формулы для объема параллелотопа в евклидовом пространстве (см. сл.8 и 9 §3 гл.V).

Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве \mathbb{R}^5 , если в стандартном репере $A(1, -2, 3, 1, 5)$, $B(2, 0, 6, 5, 10)$, $C(-1, 1, 4, 6, 1)$.

Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A .

Найти площадь $\triangle ABC$.

Находим $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 3, 1, 5, -4)$,
 $\overrightarrow{BC} = (-3, 1, -2, 1, -9)$. Далее, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{55}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$,
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 7$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 48$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 48$. Вычисляем
 $\cos A = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{7}{55}$ и аналогично $\cos B = \cos C = \frac{12}{\sqrt{330}}$.

Чтобы найти канонические уравнения высоты, найдем ее основание – точку D . Имеем $D = B + \lambda \overrightarrow{BC}$ и $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Так как $\overrightarrow{AD} = (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 3 - 2\lambda, 4 + \lambda, 5 - 9\lambda)$, имеем $-3(1 - 3\lambda) + 2 + \lambda - 2(3 - 2\lambda) + 4 + \lambda - 9(5 - 9\lambda) = 0$, откуда $\lambda = \frac{1}{2}$ и $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5, \frac{11}{2}, \frac{11}{2})$. Значит, $\overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 2, \frac{9}{2}, \frac{1}{2})$ и в качестве направляющего вектора прямой-высоты можно взять вектор $\vec{a} = 2\overrightarrow{AD} = (-1, 5, 4, 9, 1)$. Канонические уравнения высоты:

$$\frac{x_1 - 1}{-1} = \frac{x_2 + 2}{5} = \frac{x_3 - 3}{4} = \frac{x_4 - 1}{9} = \frac{x_5 - 5}{1}.$$

Чтобы найти площадь $\triangle ABC$, заметим, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}V_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, а $V_{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = \sqrt{g_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}}$ (см. предложение сл.8 §3 гл.V). Запишем определитель Грама

$$g_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB}^2 & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) & \overrightarrow{AC}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 55 & 7 \\ 7 & 55 \end{vmatrix} = 2976 = 16 \times 186.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}4\sqrt{186} = 2\sqrt{186}$.

Параллелотоп в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 построен на векторах $\vec{a}_1 = (2, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, 1, 2)$, отложенных от точки $p_0(1, 2, -1, 0)$. Проверить, лежит ли точка $q(2, 3, -2, -1)$ внутри или вне этого параллелотопа.

Найти длину высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора \vec{a}_4 на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

Параллелотоп состоит из всех точек вида $p_0 + \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4$, где $0 \leq \lambda_i \leq 1$ при $i = 1, 2, 3, 4$. Чтобы определить, принадлежит ли точка q параллелотопу, нужно разложить вектор $q - p_0 = (1, 1, -1, -1)$ по

$$\text{векторам } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4. \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Отсюда $q - p_0 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4$, т.е. $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Таким образом, точка q лежит вне параллелотопа.

Длина высоты этого параллелопада, опущенной из конца вектора \vec{a}_4 на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, равна длине ортогональной составляющей \vec{b} вектора \vec{a}_4 относительно подпространства $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$. Согласно следствию сл.10 §3

гл.V $|\vec{b}| = \sqrt{\frac{g(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)}{g(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}}$. Вычисляем

$$\sqrt{g(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$g(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & \vec{a}_2^2 & (\vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_3, \vec{a}_1) & (\vec{a}_3, \vec{a}_2) & \vec{a}_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 19 & 19 & 19 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19.$$

Таким образом, длина высоты равна $\frac{5}{\sqrt{19}}$.

Пример 3

Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точку B , симметричную точке $A(-3, -1, -2, 9)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(-1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_1 = (2, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 2, 1)$.
Найти расстояние от точки $D(1, 1, 1, 1)$ до этой гиперплоскости.

Найдем нормальный вектор \vec{n} гиперплоскости. Имеем $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ —

обобщенное векторное произведение. Вычисляем: $\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \vec{e}_1 \\ 1 & 2 & 1 & \vec{e}_2 \\ 1 & 1 & 2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 & \vec{e}_4 \end{vmatrix} =$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_4 =$$

$(-1, -1, -1, 4)$.

Записываем координатное уравнение гиперплоскости: $(\vec{n}, x - p_0) = 0$ или $-(x_1 + 1) - (x_2 - 1) - x_3 + 4(x_4 - 1) = 0$; $x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 4 = 0$.

Записываем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к гиперплоскости: $x = A + t\vec{n}$ или $x_1 = -3 - t$, $x_2 = -1 - t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 9 + 4t$.

Ищем точку C пересечения прямой и гиперплоскости, решая совместно уравнения прямой и гиперплоскости:

$-3 - t - 1 - t - 2 - t - 4(9 + 4t) + 4 = 0$; $19t + 38 = 0$; $t = -2$. Точка $C(-1, 1, 0, 1)$. Так как $\vec{CB} = -\vec{CA}$ и $\vec{CA} = (-2, -2, -2, 8)$, имеем $\vec{CB} = (2, 2, 2, -8)$ и получаем координаты точки $B(1, 3, 2, -7)$.

Расстояние от точки $D(1, 1, 1, 1)$ до гиперплоскости находим согласно формуле из предложения сл.5: $d = \frac{|1 + 1 + 1 - 4 + 4|}{\sqrt{1 + 1 + 1 + 16}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$.

Найти в аффинном пространстве \mathbb{R}^4 точки пересечения сферы $|x - p| = 6$, где $p(1, 3, 7, 3)$ и прямой, проходящей через точки $A(1, 5, 3, 7)$, $B(1, 7, -1, 11)$.

Запишем параметрические уравнения прямой (AB) . Найдем вектор $B - A = (0, 2, -4, 4)$. Направляющий вектор прямой $\vec{a} = (0, 1, -2, 2)$. Ее параметрические уравнения $x_1 = 1, x_2 = 5 + t, x_3 = 3 - 2t, x_4 = 7 + 2t$. Найдем t из условия $|x - p| = 6$, т.е. $(x - p)^2 = 36$. Так как $x - p = (x_1 - 1, x_2 - 3, x_3 - 7, x_4 - 3) = (0, t + 2, -4 - 2t, 4 + 2t) = (t + 2)(0, 1, -2, 2)$, имеем $(x - p)^2 = (t + 2)^2(1 + 4 + 4) = 9(t + 2)^2$ и $9(t + 2)^2 = 36$. Таким образом, $(t + 2)^2 = 4$ и $t + 2 = \pm 2, t_1 = 0, t_2 = -4$. Точки пересечения сферы и прямой $C_1 = A, C_2 = A - 4\vec{a} = (1, 1, 11, -1)$.