Глава IX. Аффинные пространства
§ 2. Плоскости

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F, $\dim \boldsymbol{V} = n$.

Определение

Пусть $p \in V$, $\vec{U} \subseteq \vec{V}$ – подпространство. Тогда множество $U = \{p + \vec{x} | \vec{x} \in \vec{U}\}$ называется *плоскостью* (или *линейным многообразием*) с *начальной точкой* p и *направляющим подпространством* $\vec{U}$. Обозначение: $U = p + \vec{U}$.

Легко видеть, что тогда $\boldsymbol{U} = (U, \vec{U}, +)$ будет аффинным пространством. Его можно назвать *аффинным подпространством* аффинного пространства $\boldsymbol{V}$. *Размерностью* плоскости U называется $\dim \vec{U}$.
Обозначение: $\dim U$. Если $\dim U = 0$, то $U = \{p\}$ также называется *точкой*, при $\dim U = 1$ U также называется *прямой*.
Заметим, что начальная точка всегда принадлежит плоскости.
Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ — некоторый базис подпространства $\vec{U}$. Тогда $x \in U \iff \exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in F : x = p + \xi_1 \vec{b}_1 + \xi_2 \vec{b}_2 + \ldots + \xi_k \vec{b}_k$.

Определение

Уравнение $x = p + \xi_1 \vec{b}_1 + \xi_2 \vec{b}_2 + \ldots + \xi_k \vec{b}_k$ называется *векторным уравнением* плоскости U.

Предложение

1. Если $U = p + \vec{U}$, то для любой точки $q \in U$ справедливо $U = q + \vec{U}$.
2. Если $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$, то $U \subseteq W$ тогда и только тогда, когда $\vec{U} \subseteq \vec{W}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$.
3. Если $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$, то $U = W$ тогда и только тогда, когда $\vec{U} = \vec{W}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$.

$\Downarrow$Покажем, что $U \subseteq q + \vec{U}$. Положим $\vec{x} = \overrightarrow{pq}$, тогда $p + \vec{x} = q$. Для любой точки $r \in U$ имеем $r = p + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$, и
$r = p + \vec{x} + (\vec{y} - \vec{x}) = q + (\vec{y} - \vec{x})$, т.е. $r \in q + \vec{U}$.
Покажем, что $q + \vec{U} \subseteq U$. Если $r \in q + \vec{U}$, то $r = q + \vec{z}$, где $\vec{z} \in \vec{U}$, откуда $r = (p + \vec{x}) + \vec{z} = p + (\vec{x} + \vec{z}) \in U$. Утверждение 1 доказано.
Предположим, что $U \subseteq W$. Так как $p \in U$, имеем $p \in W$ и $W = p + \vec{W}$ согласно утверждению 1. Отсюда $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$, так как $q \in W$ и $q = p + \overrightarrow{pq}$. Далее, для любого $\vec{x} \in \vec{U}$ имеем $p + \vec{x} \in U$, откуда $p + \vec{x} \in W$ и $\vec{x} \in \vec{W}$. Таким образом, $\vec{U} \subseteq \vec{W}$.
Предположим, что $\vec{U} \subseteq \vec{W}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$. Тогда для любого $\vec{x} \in \vec{U}$ имеем $p + \vec{x} = p + (\overrightarrow{pq} + \vec{x} - \overrightarrow{pq}) = (p + \overrightarrow{pq}) + (\vec{x} - \overrightarrow{pq}) = q + (\vec{x} - \overrightarrow{pq}) \in W$, так как $\vec{x}, \overrightarrow{pq} \in \vec{W}$. Утверждение 2 доказано.
Утверждение 3 непосредственно следует из утверждения 2.$\Uparrow$

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F и $\mathrm{char}(F) \neq 2$.

Лемма

Для любых различных точек p, q аффинного пространства существует единственная прямая, содержащая эти точки. Обозначение: (p, q).

$\Downarrow$Пусть $U = p + \vec{U}$, где $\vec{U} = \langle \overrightarrow{pq} \rangle$. Тогда $\dim U = 1$, поскольку $\overrightarrow{pq} \neq \vec{0}$, и $q \in U$. Пусть $W = r + \vec{W}$ – произвольная прямая, содержащая p и q. Тогда согласно утверждению 1 предложения сл.3 $W = p + \vec{W}$. Далее, $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$, поскольку $q \in W$. Так как $\overrightarrow{pq} \neq \vec{0}$ и $\dim \vec{W} = 1$, заключаем, что $\vec{W} = \langle \overrightarrow{pq} \rangle$.$\Uparrow$

Теорема

Непустое множество точек U аффинного пространства является плоскостью тогда и только тогда, когда либо $U = \{p\}$, либо для любых различных точек $p, q \in U$ имеет место $(p, q) \subseteq U$.

$\Downarrow$ Пусть U – плоскость, содержащая более одной точки, и $p, q \in U$, $p \neq q$. Тогда $U = p + \vec{U}$, и потому $\overrightarrow{pq} \in \vec{U}$, откуда следует $(p, q) \subseteq U$.

Пусть $U \subseteq V$, $|U| > 1$ и для любых различных точек $p, q \in U$ имеет место $(p, q) \subseteq U$. Зафиксируем $p \in U$. Положим $\vec{U} = \{\vec{x} \in \vec{V} | p + \vec{x} \in U\}$ и покажем, что $\vec{U}$ – подпространство $\vec{V}$. Так как $p \in U$, имеем $\vec{0} \in \vec{U}$. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{U}$, причем $\vec{x} \neq \vec{y}$. Тогда по условию $(p + \vec{x}, p + \vec{y}) \subseteq U$. Следовательно, $p + \vec{x} + \langle \vec{y} - \vec{x} \rangle \subseteq U$ и $\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x}) \in \vec{U}$ при любом $\lambda \in F$. Взяв $\vec{x} = \vec{0}$, получаем, что для любого $\vec{y} \in \vec{U}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ и любого $\lambda \in F$ имеет место $\lambda \vec{y} \in \vec{U}$, т.е. $\vec{U}$ замкнуто относительно умножения на любой скаляр из F.
Для различных $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{U}$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ (здесь используется предположение, что $\mathrm{char}(F) \neq 2$) получаем $\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \in \vec{U}$, откуда следует $\vec{x} + \vec{y} \in \vec{U}$. Поскольку $\vec{x} + \vec{x} = 2\vec{x} \in \vec{U}$, заключаем, что $\vec{U}$ замкнуто относительно сложения. Следовательно, $\vec{U}$ – подпространство. Теорема доказана.$\Uparrow$

Следствие

Пересечение любого множества плоскостей, если оно не пусто, является плоскостью.

В самом деле, такое пересечение, если оно не пусто, удовлетворяет условиям теоремы сл.4.

Теорема

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$ – плоскости в аффинном пространстве $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$. Плоскости U и W имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{pq} \in \vec{U} + \vec{W}$. Если $U \cap W \neq \emptyset$, то $U \cap W = r + (\vec{U} \cap \vec{W})$, где $r \in U \cap W$.

$\Downarrow$Пусть $U \cap W \neq \emptyset$ и $r \in U \cap W$. Тогда $r = p + \vec{x}$ и $r = q + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Следовательно, $p + \vec{x} = q + \vec{y} = p + \overrightarrow{pq} + \vec{y}$, откуда $\vec{x} = \overrightarrow{pq} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{pq} = \vec{y} - \vec{x}$. Таким образом, $\overrightarrow{pq} \in \vec{U} + \vec{W}$. Далее, по утверждению 1 предложения сл.3 имеем $U = r + \vec{U}$ и $W = r + \vec{W}$. Ясно, что $r + (\vec{U} \cap \vec{W}) \subseteq U \cap W$. Покажем, что $U \cap W \subseteq r + (\vec{U} \cap \vec{W})$. Пусть $s \in U \cap W$. Тогда $s = r + \vec{x}$ и $s = r + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Так как $\vec{x} = \vec{y}$, заключаем, что $\vec{x} \in \vec{U} \cap \vec{W}$ и $s \in r + (\vec{U} \cap \vec{W})$.
Предположим, что $\overrightarrow{pq} \in \vec{U} + \vec{W}$. Тогда $\overrightarrow{pq} = \vec{x} + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Покажем, что $p + \vec{x} = q - \vec{y}$. Имеем
$q - \vec{y} = (p + \overrightarrow{pq}) - \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y} - \vec{y}) = p + \vec{x}$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Композит двух плоскостей

Пусть U и W – плоскости в аффинном пространстве $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$. Тогда $U \cup W \subseteq V$. Так как $V = p + \vec{V}$ для любой точки $p \in V$, V является плоскостью. Обозначим через $\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle$ пересечение всех плоскостей, включающих $U \cup W$. Согласно следствию сл.5 $\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle$ является плоскостью.

Определение

Композитом плоскостей U и W называется плоскость $\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle$.

Композитом двух различных точек p, q в любом аффинном пространстве является прямая (p, q).
В геометрическом пространстве (см. сл.4 §1) композитом двух параллельных или пересекающихся прямых будет проходящая через эти прямые плоскость, а композитом двух скрещивающихся прямых – все пространство.

Строение композита выяснено в следующем утверждении.

Теорема

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$ – плоскости в аффинном пространстве $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$. Тогда $\langle\langle U, W\rangle\rangle = p + (\vec{U} + \vec{W} + \langle\overrightarrow{pq}\rangle)$.

$\Downarrow$Положим $Z = p + \vec{Z}$, где $\vec{Z} = \vec{U} + \vec{W} + \langle\overrightarrow{pq}\rangle$. Так как $\vec{U} \subseteq \vec{Z}$, ясно, что $U \subseteq Z$. Поскольку $\vec{W} \subseteq \vec{Z}$ и $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq} \in \vec{Z}$, в силу утверждения 2 предложения сл.3 $W \subseteq Z$. Таким образом, $\langle\langle U, W\rangle\rangle \subseteq Z$.
Пусть $P = r + \vec{P}$ – произвольная плоскость, включающая плоскости U и W. Покажем, что $Z \subseteq P$. Этим будет доказано, что $Z \subseteq \langle\langle U, W\rangle\rangle$ и теорема будет доказана. Так как $p \in U$, имеем $p \in P$ и потому $P = p + \vec{P}$. В силу утверждения 2 предложения сл.3 из $U \subseteq P$ следует $\vec{U} \subseteq \vec{P}$, а из $W \subseteq P$ — $\vec{W} \subseteq \vec{P}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{P}$. Следовательно, $\vec{U} + \vec{W} + \langle\overrightarrow{pq}\rangle \subseteq \vec{P}$ и $Z \subseteq P$.$\Uparrow$

Из доказанной теоремы и теоремы сл.9 с учетом теоремы сл.13 §4 гл.I вытекает

Следствие

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$. Тогда если $U \cap W \neq \emptyset$, то $\dim\langle\langle U, W\rangle\rangle = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ и если $U \cap W = \emptyset$, то $\dim\langle\langle U, W\rangle\rangle = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) + 1$.

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$ – плоскости в аффинном пространстве $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$. Предположим, что $\dim U \le \dim W$; это предположение не ограничивает общности. *Взаимное расположение плоскостей* U и W характеризуется двумя параметрами: логическим ($U \cap W = \emptyset$ – да или нет) и целочисленным – размерностью $\dim(\vec{U} \cap \vec{W})$. При условии $\dim V \ge \dim U + \dim W + 1$ возможны $2(\dim U + 1)$ способов взаимного расположения плоскостей U и W. Минимальная размерность пространства $\boldsymbol{V}$, в котором возможно взамное расположение плоскостей U и W с заданным значением $\dim(\vec{U} \cap \vec{W})$, определяется из неравенства $\dim \boldsymbol{V} \ge \dim\langle\langle U, W\rangle\rangle$ с помощью следствия сл.8.

Все 4 способа взаимного расположения двух прямых реализуются в 3-мерном пространстве (и изучены в аналитической геометрии).

Прямая и плоскость размерности 2 также могут располагаться 4-мя способами, из которых в 3-мерном пространстве реализуется только 3 (прямая и плоскость размерности 2 могут скрещиваться в пространстве размерности не меньше 4).

Две плоскости размерности 2 могут располагаться 6-ю способами, из которых в 3-мерном пространстве реализуется только 3.

Плоскости U и W называются *параллельными* (соотв. *скрещивающимися*), если $U \cap W = \emptyset$ и $\dim(\vec{U} \cap \vec{W}) = \dim \vec{U}$ (последнее условие равносильно включению $\vec{U} \subseteq \vec{W}$) (соотв. $U \cap W = \emptyset$ и $\dim(\vec{U} \cap \vec{W}) = 0$).

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F. Зафиксируем в нем репер $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Зафиксируем также набор функций $g_j : F^n \longrightarrow F$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Определение

Геометрическим образом системы уравнений $g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$ относительно репера $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называется множество всех точек p, строки координат которых в данном репере являются решениями этой системы уравнений. Будем говорить также, что система уравнений определяет свой геометрический образ, и что геометрический образ задается системой уравнений.

Теорема

Совместная система линейных уравнений от n неизвестных над полем F с основной матрицей A ранга r определяет в пространстве $\boldsymbol{V}$ плоскость размерности $n - r$. Обратно, любая плоскость размерности d задается системой из $n - d$ линейных уравнений от n неизвестных над полем F.

$\Downarrow$Пусть $A \cdot x = b$ – совместная система линейных уравнений от n неизвестных над полем F, где $A \in F^{k \times n}$, $b \in F_k$. Положим $U = \{p \in V | A \cdot [p] = b\}$ и $\vec{U} = \{\vec{x} \in \vec{V} | A \cdot [\vec{x}] = O\}$. Тогда для $p, q \in U$ согласно предложению сл.6 §1 имеем $[\overrightarrow{pq}] = [q] - [p]$, откуда $A \cdot [\overrightarrow{pq}] = A \cdot ([q] - [p]) = A \cdot [q] - A \cdot [p] = b - b = O$, т.е. $\overrightarrow{pq} \in \vec{U}$. Зафиксируем точку $p_0 \in U$. Тогда ясно, что $U = p_0 + \vec{U}$. Так как подпространство $\vec{U}$ изоморфно пространству решений однородной системы линейных уравнений $A \cdot x = O$, с помощью теоремы сл.9 §2 гл.II заключаем, что dim$U = n - r$.

Обратно, пусть $U = p + \vec{U}$ и dim$U = d$. Выберем в $\vec{U}$ базис $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_d)$. С помощью теоремы сл.16 §2 гл.II построим однородную систему $A \cdot x = O$ линейных уравнений (из $n - d$ уравнений), задающую линейную оболочку системы строк $[\vec{a}_1]^\top, \ldots, [\vec{a}_d]^\top$. Положим $b = A \cdot [p]$. Тогда геометрический образ системы линейных уравнений $A \cdot x = b$ совпадает с U. Теорема доказана. $\Uparrow$

Определения

В случае задания плоскости системой линейных уравнений эти уравнения называются *координатными уравнениями* данной плоскости.
Плоскость, заданная одним координатным уравнением, имеющим по крайней мере один ненулевой коэффициент, называется *гиперплоскостью*.

Гиперплоскость в n-мерном аффинном пространстве является плоскостью размерности $n-1$. В 2-мерном геометрическом пространстве (на обычной плоскости в 3-мерном геометрическом пространстве) гиперплоскостями будут прямые, а в 3-мерном геометрическом пространстве – обычные плоскости.
В силу теоремы сл.10 каждая плоскость является пересечением конечного семейства гиперплоскостей (каждое уравнение системы определяет гиперплоскость).

Зафиксируем аффинное пространство $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ над полем F и в нем репер $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Рассмотрим отличную от точки плоскость U, заданную векторным уравнением (см. сл.2) $x = p + \xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_d\vec{a}_d$. Отсюда следует равенство $[x] = [p] + \xi_1[\vec{a}_1] + \ldots + \xi_d[\vec{a}_d]$. Положим $[\vec{a}_j] = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})^\top$, $[p] = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top$, $[x] = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. Получаем систему равенств

Параметрические уравнения плоскости

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1d}\xi_d, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}\xi_1 + \ldots + \alpha_{2d}\xi_d, \\ \dotfill \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{nd}\xi_d. \end{cases}$$

Эти равенства естественно назвать *параметрическими уравнениями* плоскости U. Здесь β_j и α_{ij} – фиксированные скаляры, причем $d = \mathrm{r}((\alpha_{ij})_{n\times d})$, а $\xi_1, \ldots, \xi_d$ – независимые параметры, пробегающие поле F. Параметрические уравнения получаются из координатных путем решения системы линейных уравнений и записи общего решения в виде системы линейных уравнений (см. сл.7 §2 гл.II).

Уравнения прямой в аффинном пространстве

Наиболее важны параметрические уравнения прямой в аффинном пространстве F^n, проходящей через точку $p(p_1, \ldots, p_n)$ с направляющим вектором $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \neq \vec{0}$. Они дают выражения для координат произвольной точки $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на этой прямой.

Параметрические уравнения прямой в аффинном пространстве

$x_j = p_j + b_j t$ ($j = 1, \ldots, n$, $b_j \neq 0$ при некотором j); $t \in F$.

Используются также *канонические уравнения* указанной прямой.

Канонические уравнения прямой в аффинном пространстве

$$\frac{x_1 - p_1}{b_1} = \frac{x_2 - p_2}{b_2} = \ldots = \frac{x_n - p_2}{b_n}.$$

Пример

Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ пересечение двумерных плоскостей $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и $x = q_0 + t_1\vec{a}_3 + t_2\vec{a}_4$, где $p_0(-1, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_1 = (2, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $q_0(2, 1, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 1, -1)$.

Применим теорему сл.6: попробуем разложить вектор $q_0 - p_0 = (3, 0, 2, 2)$ по векторам $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
Таким образом, $q_0 - p_0 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$ и $p_0 + \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 = q_0 - 3\vec{a}_3 = r_0$. Следовательно, плоскости имеют общую точку $r_0 = (-1, -2, -2, 0)$. Наши вычисления показывают, что сумма подпространств $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$ и $\langle \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ прямая, поэтому их пересечение нулевое и плоскости имеют единственную общую точку r_0.