Глава IX. Аффинные пространства
§ 1. Основные понятия

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Понятие аффинного пространства является обобщением понятия пространства точек в аналитической геометрии.

Пусть F – поле, $\vec{V}$ – конечномерное линейное пространство над F, V – непустое множество (его элементы называются *точками* и обозначаются малыми латинскими буквами), $+ : V \times \vec{V} \longrightarrow V$ – отображение (операция откладывания вектора от точки). Элементы пространства $\vec{V}$ называются, как обычно, векторами, и обозначаются в этой главе малыми латинскими буквами со стрелками: $\vec{a}$.

Определение

Аффинным пространством над полем F называется тройка $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$, если выполняются следующие условия:

1. $\forall p \in V \ \forall \vec{x} \in \vec{V} \ \exists! q \in V : \quad p + \vec{x} = q$,
2. $\forall p \in V \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} : \quad (p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$,
3. $\forall p, q \in V \ \exists! \vec{x} \in \vec{V} : \quad p + \vec{x} = q$ (обозначение: $\vec{x} = \overrightarrow{pq} = q - p$).

Размерностью аффинного пространства $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ называется $\dim \vec{V}$. Обозначение: $\dim \boldsymbol{V}$.

Примеры аффинных пространств

1. Геометрическое пространство

Множество точек – множество всех точек, рассматриваемых в геометрии; линейное пространство – V_g; операция откладывания вектора от точки определена в аналитической геометрии, здесь мы считаем, что $A + \overrightarrow{AB} = B$ для любых точек A, B.

2. Аффинное арифметическое пространство над полем F

$\boldsymbol{V} = (F^n, \overrightarrow{F^n}, +)$.

Элементы множества F^n рассматриваются и как точки, и как векторы, во втором случае используется обозначение $\overrightarrow{F^n}$. Если $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, $\vec{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \overrightarrow{F^n}$, то по определению $p + \vec{x} = q$, где $q = (\alpha_1 + \xi_1, \ldots, \alpha_n + \xi_n) \in F^n$.

3. Аффинное арифметическое пространство над полем $\mathbb{R}$

$\boldsymbol{V} = (\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +)$.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F. Тогда для любых $p, q, r \in V$ справедливы равенства

1. $p + \vec{0} = p$,
2. $p + \overrightarrow{pq} = q$,
3. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$,
4. $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$.

$\Downarrow$Для доказательства утверждения 1 используем аксиому 1 определения аффинного пространства (сл.3): существует единственный вектор $\vec{x} \in \vec{V}$ такой что $p + \vec{x} = p$. Тогда по аксиоме 2
$p + \vec{0} = (p + \vec{x}) + \vec{0} = p + (\vec{x} + \vec{0}) = p + \vec{x} = p$, т.е. $p + \vec{0} = p$.
Второе равенство следует из аксиомы 3.
Для доказательства утверждения 3 используем аксиому 2 и утверждение 2: имеем $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r$, т.е. $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = r$. Отсюда в силу аксиомы 3 следует утверждение 3.
Чтобы доказать утверждение 4, заметим, что $p + \overrightarrow{pq} = q$, $q + \overrightarrow{qp} = p$, откуда $p = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qp} = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp})$, т.е. $p = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp})$. Следовательно, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \vec{0}$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Репер в аффинном пространстве

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F, $\dim \boldsymbol{V} = n$.

Определение

Репером (или *системой координат*) в аффинном пространстве $\boldsymbol{V}$ называется совокупность $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ из точки $o \in V$ и базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ линейного пространства $\vec{V}$.
Координатами точки $p \in V$ в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называются координаты вектора $\overrightarrow{op}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ линейного пространства $\vec{V}$.
Обозначение: $p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ или $[p] = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$; таким образом, $\overrightarrow{op} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \ldots + \gamma_n \vec{e}_n$.
Вектор $\overrightarrow{op}$ называется *радиус-вектором* точки p.

Предложение

Если в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ даны координаты точек $p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $q(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, то координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ суть $[\overrightarrow{pq}] = (\delta_1 - \gamma_1, \ldots, \delta_n - \gamma_n)^\top$.

$\Downarrow$В самом деле, согласно утверждению 3 предложения сл.5 имеем $\overrightarrow{op} + \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq}$, откуда непосредственно следует требуемое.$\Uparrow$

Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ заданы реперы $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и $(o'; \vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$. Найдем связь между координатами $[p]$ и $[p]'$ точки p в этих реперах, предполагая известными координаты $[o']$ в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и матрицу перехода $T = (\tau_{ij})_{n \times n}$ от базиса $B = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ к базису $B' = (\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n)$. Тогда $B' = B \cdot T$. Согласно утверждению 3 предложения сл.5 имеем $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p}$, откуда $B \cdot [\overrightarrow{op}] = B \cdot [\overrightarrow{oo'}] + B' \cdot [\overrightarrow{o'p}] = B \cdot [\overrightarrow{oo'}] + (B \cdot T) \cdot [\overrightarrow{o'p}] =$ $B \cdot [\overrightarrow{oo'}] + B \cdot (T \cdot [\overrightarrow{o'p}]) = B \cdot ([\overrightarrow{oo'}] + T \cdot [\overrightarrow{o'p}])$. Таким образом, $B \cdot [\overrightarrow{op}] = B \cdot ([\overrightarrow{oo'}] + T \cdot [\overrightarrow{o'p}])$, и потому $[\overrightarrow{op}] = [\overrightarrow{oo'}] + T \cdot [\overrightarrow{o'p}]$, откуда получаются

Формулы преобразования координат точки при замене репера

$$[p] = [o'] + T \cdot [p]', \quad [p]' = T^{-1} \cdot ([p] - [o']).$$