Глава IV. Линейные операторы
§ 1. Характеристический многочлен. Инвариантные подпространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть F – поле. Напомним, что характеристическим многочленом матрицы $A \in F^{n\times n}$ называется определитель $|A - xE_n|$, обозначаемый через $\chi_A(x)$ (сл. 3 §8 гл.IV ОА).

Предложение

Характеристические многочлены подобных матриц равны.

$\Downarrow$ Пусть матрица B подобна матрице A, т.е. $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ для некоторой невырожденной матрицы $T \in F^{n\times n}$. Имеем
$\chi_B(x) = |B - xE_n| = |T^{-1} \cdot A \cdot T - T^{-1} \cdot (xE_n) \cdot T| =$
$= |T^{-1} \cdot (A - xE_n) \cdot T| = |T^{-1}||A - xE_n||T| = |A - xE_n| = \chi_A(x)$, так как $|T^{-1}||T| = 1$. $\Uparrow$

Так как любые две матрицы линейного оператора конечномерного пространства подобны (см. сл. 19-21 §1 гл.III), корректным является следующее

Определение

Характеристическим многочленом линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства V размерности n называется характеристический многочлен любой матрицы этого оператора. Обозначение: $\chi_{\mathcal{A}}(x)$.

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства F_4 задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ на этом и следующем слайдах (вычитаем третью строку из первой, а четвертую прибавляем ко второй; выносим из первой и второй строки множитель $2-x$; вычитаем вторую строку, умноженную на 3, из третьей, а первую — из четвертой; вычитаем вторую строку, умноженную на 2, из четвертой; вычисляем определитель треугольной матрицы): $\chi_{\mathcal{A}}(x) =$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 2-x \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

Окончание примера

$$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)^3(-2-x) = (x-2)^3(x+2).$$

При вычислении характеристического многочлена указанным способом он получается разложенным на множители. Это оказывается весьма удобным, когда необходимо найти корни характеристического многочлена. Ниже мы увидим, что корни характеристического многочлена линейного оператора пространства V над полем F, лежащие в F, представляют особый интерес.

Из теоремы сл. 4 §8 гл.IV ОА непосредственно получается следующая

Теорема

Любой линейный оператор аннулируется своим характеристическим многочленом.

Из доказанной теоремы в силу предложений сл. 11 §3 гл.III и сл. 7 §8 гл.IV ОА вытекает

Следствие

Минимальный многочлен любого линейного оператора делит его характеристический многочлен.

Инвариантные подпространства относительно линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор линейного пространства V над полем F.

Определение

Подпространство U пространства V называется *инвариантным* относительно $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(U) \subseteq U$, т.е. $\mathcal{A}u \in U$ для любого $u \in U$.

Пространство V и нулевое подпространство $\{0_V\}$ инвариантны относительно любого линейного оператора. Они называются *тривиальными* инвариантными подпространствами. Очевидно следующее

Наблюдение

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ его образ Im$\mathcal{A}$ и ядро Ker$\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

Определение

Ограничением линейного оператора $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство U называется отображение $\mathcal{A}|_U \colon U \longrightarrow U$, которое действует на каждый вектор $u \in U$ так же, как оператор $\mathcal{A}$, т.е. $\forall u \in U \ \ \mathcal{A}|_U(u) = \mathcal{A}u$.

Матрица линейного оператора, имеющего инвариантное подпространство

Предложение

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V имеет нетривиальное инвариантное подпространство U и $\dim V = n$, $\dim U = r$ $(0 < r < n)$. Тогда в некотором базисе N пространства V матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет полураспавшийся вид

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \beta_{1\,r+1} & \dots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \beta_{2\,r+1} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} & \beta_{r\,r+1} & \dots & \beta_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{r+1\,r+1} & \dots & \beta_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n\,r+1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ограничение $\mathcal{A}|_U$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на U является линейным оператором на линейном пространстве U, и его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}|_U}$ делит характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$.

$\Downarrow$ Зафиксируем некоторый базис $e_1, \ldots, e_r$ подпространства U и дополним его до базиса N пространства V векторами $f_{r+1}, \ldots, f_n$. Запишем матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе N. Так как $\mathcal{A}e_i \in U$ при любом $i = 1, , \ldots, r$ в силу инвариантности U, видим, что $\mathcal{A}e_i = \alpha_{i1}e_1 + \ldots + \alpha_{ir}e_r$. Следовательно, матрица A_N имеет вид (1) сл.7. Очевидно, что ограничение $\mathcal{A}|_U$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на U является линейным оператором на линейном пространстве U. Чтобы доказать последнее утверждение предложения, запишем характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ в виде определителя $|A_N - xE_n|$ и представим его в виде произведения двух определителей: $f_{\mathcal{A}}(x) =$

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} & \beta_{1\,r+1} & \ldots & \beta_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \ldots & \alpha_{2r} & \beta_{2\,r+1} & \ldots & \beta_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \ldots & \alpha_{rr} - x & \beta_{r\,r+1} & \ldots & \beta_{rn} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{r+1\,r+1} - x & \ldots & \beta_{r+1\,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{n\,r+1} & \ldots & \beta_{nn} - x
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} - x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{r+1\,r+1} - x & \dots & \beta_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n\,r+1} & \dots & \beta_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Поскольку первый множитель в произведении после второго знака равенства в этой записи есть в точности характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}|_U$, записанный в виде определителя через матрицу этого оператора в базисе $e_1, \dots, e_r$, получаем требуемое утверждение. $\Uparrow$

Следствие

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор линейного пространства V и $V = U_1 \oplus U_2$, где U_1 и U_2 – инвариантные подпространства относительно $\mathcal{A}$. Пусть N – базис V, полученный объединением базисов U_1 и U_2, A_j – матрица ограничения $\mathcal{A}|_{U_j}$ $(j = 1, 2)$. Тогда матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ и $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{A}|_{U_1}}(x) \cdot \chi_{\mathcal{A}|_{U_2}}(x)$.

Доказательство этого утверждения получается повторением доказательства предложения сл.7.

Следствие сл.9 позволяет сводить изучение линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства V к изучению его ограничений на инвариантные подпространства $U_1, \ldots, U_m$ при условии, что $V = \oplus_{j=1}^m U_j$. Это осуществлено в §4 для линейных операторов, у которых характеристический многочлен разлагается на линейные множители.

"Источником"инвариантных подпространств является следующее

Предложение

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Тогда подпространства $\mathrm{Im}\mathcal{B}$ и $\mathrm{Ker}\mathcal{B}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Пусть $v \in \mathrm{Im}\mathcal{B}$. Тогда $v = \mathcal{B}u$ для некоторого $u \in V$. Имеем $\mathcal{A}v = \mathcal{A}(\mathcal{B}u) = \mathcal{B}(\mathcal{A}u) \in \mathrm{Im}\mathcal{B}$, и $\mathrm{Im}\mathcal{B}$ является инвариантным подпространством относительно $\mathcal{A}$.
Пусть $v \in \mathrm{Ker}\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B}v = 0_V$. Имеем $\mathcal{B}(\mathcal{A}v) = \mathcal{A}(\mathcal{B}v) = \mathcal{A}0_V = 0_V$, т.е. $\mathcal{A}v \in \mathrm{Ker}\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\mathcal{B}$ является инвариантным подпространством относительно $\mathcal{A}$. $\Uparrow$

Пусть F – поле, V – линейное пространство над F, $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$, $f \in F[x]$. Из предложения сл.10 и наблюдения сл.11 §3 гл.III получаем

Следствие

Подпространства $\mathrm{Im} f(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Ker} f(\mathcal{A})$ инвариантны относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ для любого многочлена $f \in F[x]$.

В частности, для дальнейшего потребуется

Наблюдение

Для любого натурального числа m и любого скаляра $\gamma \in F$ подпространства $\mathrm{Im}(\mathcal{A} - \gamma\mathcal{E})^m$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \gamma\mathcal{E})^m$ инвариантны относительно линейного оператора $\mathcal{A}$.

Предложение

Если подпространство $U \subseteq V$ инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, то оно инвариантно и относительно $f(\mathcal{A})$ для любого многочлена $f \in F[x]$.

$\Downarrow$ Пусть $f = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_m x^m$. Для любого $u \in U$ имеем $\mathcal{A}u \in U$, $\mathcal{A}^2 u = \mathcal{A}(\mathcal{A}u) \in U, \ldots, \mathcal{A}^m u \in U$. Следовательно, $f(\mathcal{A})u = (\lambda_0 \mathcal{E} + \lambda_1 \mathcal{A} + \ldots + \lambda_m \mathcal{A}^m)u = \lambda_0 u + \lambda_1 \mathcal{A}u + \ldots + \lambda_m \mathcal{A}^m u \in U$ и U инвариантно и относительно $f(\mathcal{A})$. $\Uparrow$

Следствие

Для любого скаляра $\gamma \in F$ подпространство $U \subseteq V$ инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $\mathcal{A} - \gamma\mathcal{E}$.

$\Downarrow$Достаточно заметить, что $\mathcal{A} - \gamma\mathcal{E} = f(\mathcal{A})$, где $f(x) = x - \gamma$, и $\mathcal{A} = g(\mathcal{A} - \gamma\mathcal{E})$, где $g(x) = x + \gamma$. $\Uparrow$

Из теоремы сл. 16 §2 гл.III вытекает

Предложение

Пусть $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ – линейный оператор, $U \subseteq V$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство. Если $U \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_V\}$, то $\mathcal{A}U = U$.

$\Downarrow$В самом деле, из условия $U \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_V\}$ следует $\mathrm{Ker}\mathcal{A}|_U = \{0_V\}$ и эквивалентность условий 2 и 3 следствия сл. 22 §2 гл.III влечет за собой $\mathrm{Im}\mathcal{A}|_U = U$, т.е. $\mathcal{A}U = U$.$\Uparrow$

Лемма

Пусть $\mathcal{A}: V \longrightarrow V$ – линейный оператор, $U \subseteq V$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_U$. Тогда минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}_1}(x)$ делит минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}(x)$.

$\Downarrow$ Так как для любого $u \in U$ справедливо $\mathcal{A}_1 u = \mathcal{A}u$, имеем $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_1)u = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})u = 0_V$, т.е. $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{O}$. Следовательно, по следствию сл.11 §3 гл.III $\mu_{\mathcal{A}_1}(x)$ делит $\mu_{\mathcal{A}}(x)$. $\Uparrow$

Теорема

Пусть линейное пространство $V = \oplus_{j=1}^{m} U_j$, $\mathcal{A}: V \longrightarrow V$ – линейный оператор, $U_j \subseteq V$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство, $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}|_{U_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда многочлен $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ равен наименьшему общему кратному многочленов $\mu_{\mathcal{A}_j}(x)$ по $j = 1, \ldots, m$.

$\Downarrow$ Пусть $f(x)$ – наименьшее общее кратное минимальных многочленов $\mu_{\mathcal{A}_j}(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Согласно лемме $\mu_{\mathcal{A}_j}(x)$ делит $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ при всех $j = 1, \ldots, m$. Следовательно, $f(x)$ делит $\mu_{\mathcal{A}}(x)$. Покажем, что $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Имеем $f(x) = g_j(x)\mu_{\mathcal{A}_j}(x)$ для некоторых многочленов $g_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Возьмем $v \in V$ и запишем $v = u_1 + \ldots + u_m$, где $u_j \in U_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда $\mathcal{A}v = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{A}u_j = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j u_j$, откуда $f(\mathcal{A})v = = \sum_{j=1}^{m} f(\mathcal{A}_j)u_j = \sum_{j=1}^{m} g_j(\mathcal{A}_j)(\mu_{\mathcal{A}_j}(\mathcal{A}_j)u_j) = 0_V$. Итак, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ и $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ делит $f(x)$. Теорема доказана. $\Uparrow$