Глава III. Линейные отображения
§ 3. Действия над линейными отображениями

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Сложение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F. Обозначим через $\mathrm{H}(U, V)$ множество всех линейных отображений из U в V.

Определение суммы линейных отображений

Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{H}(U, V)$ называется отображение $\mathcal{C} : U \longrightarrow V$, определенное так: $\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ для любого $x \in U$.
Обозначение: $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Предложение

Сумма двух линейных отображений является линейным отображением. Множество $\mathrm{H}(U, V)$ является абелевой группой относительно операции сложения.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{H}(U, V)$. Для любых $x, y \in U$, $\alpha \in F$ имеем
$\mathcal{C}(x + y) = \mathcal{A}(x + y) + \mathcal{B}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y + \mathcal{B}x + \mathcal{B}y =$
$\mathcal{A}x + \mathcal{B}x + \mathcal{A}y + \mathcal{B}y = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$ и
$\mathcal{C}(\alpha x) = \mathcal{A}(\alpha x) + \mathcal{B}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x + \alpha\mathcal{B}x = \alpha(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \alpha\mathcal{C}x$. Таким образом, $\mathcal{C}$ – линейное отображение, и сложение – алгебраическая операция на множестве $\mathrm{H}(U, V)$.

Окончание доказательства предложения

Докажем, что операция сложения на множестве $\mathsf{H}(U,V)$ коммутативна. Для $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathsf{H}(U,V)$ и любого $x\in U$ имеем $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x=\mathcal{A}x+\mathcal{B}x=\mathcal{B}x+\mathcal{A}x=(\mathcal{B}+\mathcal{A})x$, откуда $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$. Ассоциативность сложения проверяется аналогично.

Нейтральным элементом относительно сложения в $\mathsf{H}(U,V)$ является нулевое отображение $\mathcal{O}$, определенное так: $\mathcal{O}x=0_V$ для любого $x\in U$. Очевидно, что $\mathcal{O}\in\mathsf{H}(U,V)$.

Противоположным элементом к отображению $\mathcal{A}\in\mathsf{H}(U,V)$ является отображение $\mathcal{B}$, определенное так: $\mathcal{B}x=-(\mathcal{A}x)$ для любого $x\in U$. Легко видеть, что $\mathcal{B}\in\mathsf{H}(U,V)$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{O}$. $\Uparrow$

Умножение на скаляр

Определение

Произведением линейного отображения $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ на скаляр $\lambda \in F$ называется отображение $\mathcal{D} : U \longrightarrow V$, определенное так: $\mathcal{D}x = \lambda(\mathcal{A}x)$ для любого $x \in U$. Обозначение: $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$.

Предложение

Произведение линейного отображения на скаляр является линейным отображением. Множество $\mathrm{H}(U, V)$ является линейным пространством над полем F.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$. Для любых $x, y \in U$, $\alpha \in F$ имеем $\mathcal{D}(x + y) = \lambda(\mathcal{A}(x + y)) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \lambda\mathcal{A}x + \lambda\mathcal{A}y = \mathcal{D}x + \mathcal{D}y$ и $\mathcal{D}(\alpha x) = \lambda(\mathcal{A}(\alpha x)) = \lambda(\alpha\mathcal{A}x) = \alpha(\lambda\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{D}x)$, откуда $\mathcal{D} \in \mathrm{H}(U, V)$.
Докажем, что $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{H}(U, V)$ и $\lambda \in F$.
Имеем $(\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}))x = \lambda((\mathcal{A} + \mathcal{B})x) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \lambda\mathcal{A}x + \lambda\mathcal{B}x =$
$= (\lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})x$ для любого $x \in U$, что и требуется.
Аналогично проверяются остальные аксиомы линейного пространства (см. сл.3 §1 гл.I): $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}$, $\lambda(\mu\mathcal{A}) = (\lambda\mu)\mathcal{A}$, $1\mathcal{A} = \mathcal{A}$ для любых $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ и $\lambda, \mu \in F$.$\Uparrow$

Теорема

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\dim U = n > 0$, $\dim V = k > 0$. Тогда линейные пространства $\mathrm{H}(U, V)$ и $F^{k\times n}$ изоморфны.

$\Downarrow$ Выберем базисы $B = (b_1, \ldots, b_n)$ в пространстве U и $C = (c_1, \ldots, c_k)$ в пространства V. Определим отображение $\Phi : \mathrm{H}(U, V) \to F^{k\times n}$, полагая $\Phi(\mathcal{A}) = A_{B,C}$, где $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C. В силу матричного определения матрицы линейного отображения (см. равенство (3) на сл.8 §1) имеем

$$\mathcal{A}B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}). \tag{1}$$

Покажем, что Φ – изоморфизм. Сначала убедимся, что Φ – биекция. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathrm{H}(U, V)$ и $\Phi(\mathcal{A}_1) = \Phi(\mathcal{A}_2)$. В силу (1) имеем $\mathcal{A}_1 B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1) = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_2 B$, откуда $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, поскольку $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ одинаково действуют на базис B. Таким образом, Φ инъективно. Для доказательства сюръективности возьмем любую матрицу $M \in F^{k\times n}$. По теореме сл.7 §1 существует $\mathcal{M} \in \mathrm{H}(U, V)$ такое что $\mathcal{M}B = C \cdot M$, т.е. $\Phi(\mathcal{M}) = M$. Мы доказали, что Φ – биекция.

Для строк из n векторов линейного пространства V сложение и умножение на скаляр определяются поэлементно.
Покажем, что Φ – линейное отображение. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathrm{H}(U, V)$. Имеем $C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)B = \mathcal{A}_1 B + \mathcal{A}_2 B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1) + C \cdot \Phi(\mathcal{A}_2) = C \cdot (\Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2))$, откуда следует $\Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2)$.
Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$, $\lambda \in F$. Тогда $C \cdot \Phi(\lambda\mathcal{A}) = (\lambda\mathcal{A})B = \lambda(\mathcal{A}B) = \lambda(C \cdot \Phi(\mathcal{A})) = C \cdot (\lambda\Phi(\mathcal{A}))$, откуда $\Phi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\Phi(\mathcal{A})$.
Теорема полностью доказана. $\Uparrow$

Следствие

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathrm{dim} U = n$, $\mathrm{dim} V = k$. Тогда $\mathrm{dim}_F \mathrm{H}(U, V) = kn$.

Умножение

Пусть U, V, W – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$, $\mathcal{B} \in \mathrm{H}(V, W)$.

Определение

Произведением линейных отображений $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ называется отображение $\mathcal{C} : U \longrightarrow W$, определенное так: $\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$ для любого $x \in U$.
Обозначение: $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Предложение

Произведение линейных отображений является линейным отображением.
Если N, K, L – базисы пространств U, V, W соответственно, $\mathcal{A} \leftrightarrow_{N,K} A$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_{K,L} B$, $\mathcal{C} \leftrightarrow_{N,L} C$, то $C = B \cdot A$.

$\Downarrow$ Для любых $x, y \in U$ имеем $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x+y)) =$
$= \mathcal{B}(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mathcal{B}(\mathcal{A}y) = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$, откуда $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$.
Для любых $x \in U$, $\lambda \in F$ имеем $\mathcal{C}(\lambda x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda x)) = \mathcal{B}(\lambda \mathcal{A}x) = \lambda \mathcal{B}(\mathcal{A}x) =$
$= \lambda \mathcal{C}x$, т.е. $\mathcal{C}(\lambda x) = \lambda \mathcal{C}x$. Таким образом, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.
По матричному определению матрицы линейного отображения
$\mathcal{A}N = K \cdot A$, $\mathcal{B}K = L \cdot B$, $\mathcal{C}N = L \cdot C$. С другой стороны, $\mathcal{C}N = \mathcal{B}(\mathcal{A}N) =$
$= \mathcal{B}(K \cdot A) = (\mathcal{B}K) \cdot A = (L \cdot B) \cdot A = L \cdot (B \cdot A)$. Следовательно,
$C = B \cdot A$. $\Uparrow$

Используя формулу для матрицы произведения линейных отображений и ассоциативность умножения отображений, можно получить еще одно доказательство ассоциативности умножения матриц. Пусть $A \in F^{n\times k}$, $B \in F^{p\times n}$, $C \in F^{m\times p}$. Возьмем пространства F_k, F_n, F_p, F_m и с помощью матрицы A построим линейное отображение $\mathcal{A} : F_k \longrightarrow F_n$ по правилу $\mathcal{A}x = A \cdot x$ и аналогично с помощью матриц B, C построим линейные отображения $\mathcal{B} : F_n \longrightarrow F_p$ и $\mathcal{C} : F_p \longrightarrow F_m$. Так как $\mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}$, заключаем, что $C \cdot (B \cdot A) = (C \cdot B) \cdot A$.

Предложение

Пусть U, V, W – конечномерные линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$, $\mathcal{B} \in \mathrm{H}(V, W)$. Тогда $\mathrm{r}(\mathcal{A}) + \mathrm{r}(\mathcal{B}) - \mathrm{dim}V \le \mathrm{r}(\mathcal{B}\mathcal{A}) \le \mathrm{r}(\mathcal{A}), \mathrm{r}(\mathcal{B})$.

$\Downarrow$ Так как $\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathrm{Im}\mathcal{A})$, заключаем, что $\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{B}$ и $\mathrm{dim}(\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}) \le \mathrm{dim}(\mathrm{Im}\mathcal{A})$, поэтому $\mathrm{r}(\mathcal{B}\mathcal{A}) \le \mathrm{r}(\mathcal{B})$ и $\mathrm{r}(\mathcal{B}\mathcal{A}) \le \mathrm{r}(\mathcal{A})$.
Так как $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^{-1}(\mathrm{Im}\mathcal{B}\mathcal{A})$, согласно предложению сл.16 §2 $\mathrm{r}(\mathcal{A}) \le \mathrm{r}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \mathrm{d}(\mathcal{B})$. Из теоремы сл.10 §2 следует, что $\mathrm{d}(\mathcal{B}) = \mathrm{dim}V - \mathrm{r}(\mathcal{B})$. Подставив в последнее неравенство, получим $\mathrm{r}(\mathcal{A}) \le \mathrm{r}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \mathrm{dim}V - \mathrm{r}(\mathcal{B})$, откуда следует требуемое неравенство $\mathrm{r}(\mathcal{A}) + \mathrm{r}(\mathcal{B}) - \mathrm{dim}V \le \mathrm{r}(\mathcal{B}\mathcal{A})$. $\Uparrow$

Следствие для матриц

Предложение сл.8 дает другое доказательство свойства 4 ранга матрицы (сл.13 §1 гл.II) и позволяет указать еще одно свойство ранга, связанное с умножением матриц.

Следствие

Пусть F – поле. Для любых матриц $A \in F^{k\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ имеет место неравенство $\mathsf{r}(A) + \mathsf{r}(B) - n \leq \mathsf{r}(A \cdot B)$.

Операции над линейными операторами

Пусть V – линейное пространство над полем F. Напомним, что через $\mathrm{H}(V)$ обозначается множество всех линейных операторов на V. Тогда на $\mathrm{H}(V)$ определены операции сложения, умножения на скаляр и умножения. В частности, для любого линейного оператора определены степени с натуральным показателем. Вспомним, что через $\mathcal{E}$ обозначается единичный оператор (см. сл.5 §1), определяемый так: $\mathcal{E}v = v$ для любого $v \in V$. Для любого многочлена $f = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_m x^m$ из кольца многочленов $F[x]$ над полем F определим

Значение многочлена от линейного оператора

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$. Положим $f(\mathcal{A}) = \lambda_0\mathcal{E} + \lambda_1\mathcal{A} + \ldots + \lambda_m\mathcal{A}^m$.

Ясно, что $f(\mathcal{A}) \in \mathrm{H}(V)$ для любых $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$, $f \in F[x]$. Из утверждения сл.7 следует, что если N – базис V и $\mathcal{A} \leftrightarrow_N A$ для некоторой матрицы $A \in F^{n\times n}$, то для любого натурального числа m имеет место $\mathcal{A}^m \leftrightarrow_N A^m$. Мы получаем следующее

Предложение

Если N – базис V и $\mathcal{A} \leftrightarrow_N A$, то для любого многочлена $f \in F[x]$ справедливо $f(\mathcal{A}) \leftrightarrow_N f(A)$.

Определение

Говорят, что многочлен $f(x)$ *аннулирует* линейный оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Из предложения сл. 10 получаем

Предложение

Следующие условия эквивалентны для многочлена $f(x)$:
(1) $f(x)$ аннулирует линейный оператор $\mathcal{A}$;
(2) $f(x)$ аннулирует матрицу оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе;
(3) $f(x)$ аннулирует матрицу оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе.

Можно определить *минимальный многочлен* $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ линейного оператора $\mathcal{A}$ аналогично тому, как это было сделано для квадратных матриц на сл.5-7 §8 гл.IV ОА. Старший коэффициент многочлена $\mu_{\mathcal{A}}(x)$ равен 1. Из предложения сл.6 §8 гл.IV ОА и предложения этого слайда вытекает

Следствие

Минимальный многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ совпадает с минимальным многочленом любой матрицы оператора $\mathcal{A}$ и делит любой многочлен, аннулирующий $\mathcal{A}$.

Определение

Линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{H}(V)$ называются *перестановочными*, если $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Очевидно следующее

Наблюдение

Для любых $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$, $f \in F[x]$ линейные операторы $\mathcal{A}$ и $f(\mathcal{A})$ перестановочны.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V называется *обратимым*, если существует обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ (т.е. если $\mathcal{A}$ является изоморфизмом V на себя).

Из наблюдения сл.18 §2 немедленно получаем

Наблюдение

Обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ к линейному оператору $\mathcal{A}$ само является линейным оператором.

Из предложения сл.18 §2 немедленно следует

Предложение

Следующие условия для линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства V размерности n эквивалентны:
(1) оператор $\mathcal{A}$ обратим;
(2) матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе невырожденная;
(3) матрица оператора $\mathcal{A}$ в любом базисе невырожденная.