Глава III. Линейные отображения
§ 2. Образ и ядро линейного отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Образ линейного отображения

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Определение

Образом отображения $\mathcal{A}$ называется его область значений $E(\mathcal{A})$ (см. сл.2 §1 гл.III ОА). Образ линейного отображения $\mathcal{A}$ принято обозначать Im$\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}U$.

По определению имеет место равенство Im$\mathcal{A} = \{y \in V | \exists x \in U : \mathcal{A}x = y\}$.

Предложение

Пусть $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – произвольный базис пространства U, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение. Тогда образ $\mathcal{A}$ есть подпространство пространства V и $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}B \rangle = \langle \mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, \ldots, \mathcal{A}b_n \rangle$.

$\Downarrow$ Так как $\mathcal{A}0_U = 0_V$, имеем $0_V \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Пусть $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$. По определению $y_j = \mathcal{A}x_j$ $(j = 1, 2)$ для некоторых $x_1, x_2 \in U$. Согласно определению линейного отображения имеем $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2 = = y_1 + y_2$, т.е. множество $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ замкнуто относительно сложения.
Для любого $\lambda \in F$ по определению линейного отображения имеем $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1) = \lambda y_1$, т.е. множество $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ замкнуто относительно умножения на скаляр. Согласно предложению сл.3 §4 гл.I множество $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ является подпространством.
Так как по определению $\mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, \ldots, \mathcal{A}b_n \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$ и $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ является подпространством, в силу леммы сл.2 §4 гл.I имеем $\langle \mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, \ldots, \mathcal{A}b_n \rangle \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Для доказательства обратного включения возьмем вектор $y \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$. По определению $y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in U$. Разложим x по базису B: $x = B \cdot [x]_B$. Тогда $y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}(B \cdot [x]_B) = = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B$, откуда следует, что $y \in \langle \mathcal{A}B \rangle$. Таким образом, $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, \ldots, \mathcal{A}b_n \rangle$, и утверждение доказано. $\Uparrow$

Определение

Рангом линейного отображения $\mathcal{A}$ называется размерность его образа: $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A})$.

Из предложения сл.2 и предложения сл.12 §3 гл.I вытекает

Предложение

Пусть U, V – ненулевые конечномерные пространства над полем F и $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение. Тогда для любых базисов B пространства U и C пространства V имеет место равенство $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(A_{B,C})$, где $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A_{B,C}$.

Таким образом, ранг линейного отображения равен рангу его матрицы независимо от выбора базисов. То, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов, следует и из формулы сл.18 §1 в силу свойства 5 из теоремы сл.13 §1 гл.II.

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Определение ядра линейного отображения

Ядром отображения $\mathcal{A}$ называется полный прообраз нулевого подпространства $\{0_V\}$ при отображении $\mathcal{A}$. Обозначение: $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x \in U | \mathcal{A}x = 0_V\}$.

Предложение

Ядро любого линейного отображения линейного пространства U в линейное пространство V является подпространством в U.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение. Воспользуемся предложением сл.3 §4 гл.I. Очевидно, что $0_U \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Для любых $x, y \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y = 0_V + 0_V = 0_V$, поэтому $x + y \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Для любых $x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и $\lambda \in F$ справедливо $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}x) = \lambda 0_V = 0_V$, значит, $\lambda x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. $\Uparrow$

Определение дефекта линейного отображения

Дефектом линейного отображения $\mathcal{A}$ называется размерность его ядра. Обозначение: $\mathrm{d}(\mathcal{A})$. Таким образом, $\mathrm{d}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A})$.

Пусть F – поле, $k, n \in \mathbb{N}$, $U = F_n$, $V = F_k$, $A \in F^{k\times n}$. Положим $\mathcal{A}x = A \cdot x$ для любого столбца $x \in U$. Тогда $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Предложение

Образ $\mathcal{A}$ – линейная оболочка системы столбцов матрицы A; ядро A – множество всех столбцов из F_n, полученных транспонированием всех строк из пространства решений однородной системы линейных уравнений $A \cdot x = O$.

$\Downarrow$Пусть $a_j \in F_k$, $(a_1, \ldots, a_n)$ – система столбцов матрицы A, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^\top \in U$. Тогда $A \cdot x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n$, и
$\mathrm{Im}\mathcal{A} = \{A \cdot x | x \in F_n\} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
$\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x \in F_n | A \cdot x = O\}$.$\Uparrow$

Пример 2. Образ и ядро отображения дифференцирования

Полагая $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$, для любого натурального числа n получаем линейное отображение $\mathcal{D} : VP_n(F) \longrightarrow VP_{n-1}(F)$.

Наблюдение

Образ отображения дифференцирования – пространство $VP_{n-1}(F)$, его ядро – поле $F \subset VP_n(F)$.

Пусть n-мерное линейное пространство V над полем F разлагается в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$. Напомним, что оператором проектирования пространства V на подпространство U параллельно W называется отображение V на V, сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ его компоненту u на подпространство U параллельно W ($x = u + w$, $u \in U$, $w \in W$). Обозначение: $\mathcal{P}_{U\|W}$.

Наблюдение

$\mathrm{Im}\mathcal{P}_{U\|W} = U$, $\mathrm{Ker}\mathcal{P}_{U\|W} = W$.

Непосредственно следует из определения: $\mathcal{P}_{U\|W}(u + w) = u$.

Определение

Пусть U — подпространство линейного пространства V. Система векторов $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ называется *линейно независимой по модулю U*, если для любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ из условия $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k \in U$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Если $U_1 \subseteq U_2$, то из линейной независимости системы векторов по модулю U_2 следует ее линейная независимость по модулю U_1.

Важное вспомогательное утверждение

Наблюдение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ – система векторов из U. Система $(\mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, \ldots, \mathcal{A}b_k)$ линейно независима тогда и только тогда, когда система $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ линейно независима по модулю Ker$\mathcal{A}$.

$\lambda_1\mathcal{A}b_1 + \lambda_2\mathcal{A}b_2 + \ldots + \lambda_k\mathcal{A}b_k = 0_V \Leftrightarrow \mathcal{A}(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k) = 0_V \Leftrightarrow$ $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k \in$ Ker$\mathcal{A}$.

Предложение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение, и W — подпространство U такое, что $W \cap$ Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$, $b_1, \ldots, b_k \in W$. Если система $(b_1, \ldots, b_k)$ линейно независима, то и система $(\mathcal{A}b_1, \ldots, \mathcal{A}b_k)$ линейно независима.

$\Downarrow$Пусть система $(b_1, \ldots, b_k)$ линейно независима. Тогда она линейно независима и по модулю Ker$\mathcal{A}$, так как если $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k \in$ Ker$\mathcal{A}$, то $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k \in$ Ker$\mathcal{A} \cap W$ и $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k = 0_U$.
Из наблюдения следует, что и система $(\mathcal{A}b_1, \ldots, \mathcal{A}b_k)$ линейно независима. $\Uparrow$

Теорема

Пусть U, V – конечномерные линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение. Тогда $\mathrm{r}(\mathcal{A}) + \mathrm{d}(\mathcal{A}) = \mathrm{dim}U$.

$\Downarrow$ Если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \neq \{0_U\}$, то выберем в $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ базис $(e_1, \ldots, e_m)$ и дополним его до базиса пространства U системой векторов $(f_1, \ldots, f_k)$. Если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$, то выберем в U базис $(f_1, \ldots, f_k)$. Положим $g_j = \mathcal{A} f_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ и покажем, что $(g_1, \ldots, g_k)$ – базис в подпространстве $\mathrm{Im}\mathcal{A}$. Из предложения сл.3 следует, что система $(g_1, \ldots, g_k)$ порождает $\mathrm{Im}\mathcal{A}$. Так как по построению $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ и система $(f_1, \ldots, f_k)$ линейно независима, система $(g_1, \ldots, g_k)$ также линейно независима в силу предложения сл.9. Мы убедились, что $(g_1, \ldots, g_k)$ – базис $\mathrm{Im}\mathcal{A}$. Значит, $\mathrm{dim}U = m + k = \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) + \mathrm{dim}(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \mathrm{d}(\mathcal{A}) + \mathrm{r}(\mathcal{A})$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

Приведем два алгоритма нахождения базисов образа и ядра линейного отображения. Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базисы U и V, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение, $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A$. Алгоритмы выдают координаты векторов базиса Ker$\mathcal{A}$ в базисе B и координаты векторов базиса Im$\mathcal{A}$ в базисе C.

Алгоритм 1

Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A_1 (нулевые строки можно отбросить). Из столбцов полученной матрицы выделим максимальную линейно независимую подсистему. Соответствующие столбцам этой системы столбцы матрицы A дадут координаты базисных векторов образа Im$\mathcal{A}$ в базисе C. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений $A_1 \cdot x = O$ дает координаты базисных векторов ядра Ker$\mathcal{A}$ в базисе B.

Так как столбцы матрицы A есть координатные столбцы порождающей системы подпространства Im$\mathcal{A}$ в базисе C, обоснование первой части алгоритма получается из утверждения сл.7 §4 гл.I. Вторая часть работает правильно, так как $u \in$ Ker$\mathcal{A} \Leftrightarrow [\mathcal{A}u] = O \Leftrightarrow A \cdot [u] = O$. Однородная система линейных уравнений $A \cdot x = O$ равносильна системе $A_1 \cdot x = O$, поэтому ее фундаментальная система решений и дает координаты базисных векторов ядра Ker$\mathcal{A}$ в базисе B.

ЯО алгоритм

Построим матрицу $(E_n|A^\top)$ размеров $n \times (n+k)$ и с помощью элементарных преобразований строк приведем эту матрицу к виду $(M|A_1)$, где A_1 – ступенчатая по строкам матрица, полученная на месте матрицы $A^\top$. Тогда ненулевые строки матрицы A_1 дают координаты базисных векторов образа Im$\mathcal{A}$ в базисе C, а строки матрицы M, имеющие нулевые продолжения в матрице A_1, дают координаты базисных векторов ядра Ker$\mathcal{A}$ в базисе B.

Этот алгоритм был предложен новосибирским алгебраистом Валерием Авдеевичем Чуркиным (р. 1946) в 1991 г.

Ненулевые строки матрицы A_1 дают координаты базисных векторов образа $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ в базисе C согласно утверждению о втором способе нахождения базиса подпространства (сл.7 §4 гл.I). Их количество равно $\mathsf{r}(\mathcal{A})$. Матрица $(E_n|A^\top)$ имеет в качестве строк строки координат $\big([b_j]_B^\top\big|\,[\mathcal{A}b_j]_C^\top\big)$. При выполнении элементарных преобразований над строками этой матрицы получаем строки вида $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j[b_j]_B^\top\middle|\,\sum_{j=1}^n \lambda_j[\mathcal{A}b_j]_C^\top\right)$. Так как $\sum_{j=1}^n \lambda_j[\mathcal{A}b_j]_C^\top = \sum_{j=1}^n[\lambda_j(\mathcal{A}b_j)]_C^\top = \sum_{j=1}^n[\mathcal{A}(\lambda_j b_j)]_C^\top = [\mathcal{A}(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j)]_C^\top$ и $\sum_{j=1}^n \lambda_j[b_j]_B^\top = [\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j]_B^\top$, получаем строку вида $\big([u]_B^\top\big|\,[\mathcal{A}u]_B^\top\big)$. Поэтому строки матрицы M, имеющие нулевые продолжения, являются строками координат векторов из $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ в базисе B. Эти строки линейно независимы, так как получены с помощью элементарных преобразований из единичной матрицы. Их количество равно $n-\mathsf{r}(\mathcal{A})=\mathsf{d}(\mathcal{A})$. Согласно утверждению 2 теоремы сл.6 §3 гл.I они дают координаты базисных векторов ядра $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ в базисе B.

Найти базисы образа и ядра линейного отображения, имеющего в некотором базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Чтобы найти базис образа, проведем элементарные преобразования строк матрицы A (отбрасываем нулевые строки, если они получаются):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Видим, что первый и второй столбцы матрицы A дают координаты векторов базиса образа. Чтобы найти базис ядра, рассмотрим однородную систему линейных уравнений с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Запишем эту систему: $\begin{cases} \xi_1 - \xi_3 - 2\xi_4 = 0, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0. \end{cases}$ Ее общее решение $\begin{cases} \xi_1 = \xi_3 + 2\xi_4, \\ \xi_2 = -2\xi_3 - 3\xi_4. \end{cases}$ Фундаментальная система решений:

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Базис в ядре образуют векторы с координатами $(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$.

Пример 1 применения ЯО алгоритма

Найти базисы образа и ядра линейного отображения, имеющего в некотором базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом, строки $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ дают координаты векторов базиса образа, а строки $(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$ – координаты векторов базиса ядра.

Доказать, что существует единственный линейный оператор $\mathcal{A}$, который переводит векторы $a_1 = (1,0,1,-1)$, $a_2 = (1,1,-1,0)$, $a_3 = (1,2,1,0)$, $a_4 = (0,1,0,-1)$ в векторы $b_1 = (1,0,2,-1)$, $b_2 = (1,1,-1,2)$, $b_3 = (1,0,1,0)$, $b_4 = (1,1,0,1)$ соответственно. Найти базисы образа и ядра оператора $\mathcal{A}$, а также полный прообраз вектора $x = (0,-1,4,-4)$ при действии оператора $\mathcal{A}$.

Согласно теореме существования и единственности линейного отображения (сл.8 §1 гл.II) для доказательства достаточно убедиться, что векторы a_1, a_2, a_3, a_4 образуют базис.

Для этого проверим, что они линейно независимы. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Чтобы найти базисы образа и ядра оператора $\mathcal{A}$, составим матрицу, приписав к каждому вектору a_j его образ b_j $(j = 1,2,3,4)$: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Базис образа оператора $\mathcal{A}$ образуют векторы $c_1 = (1, 0, 1, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0, 0)$, $c_3 = (0, 0, -1, 1)$, при этом $\mathcal{A}d_j = c_j$ для $d_1 = (1, 2, 1, 0)$, $d_2 = (0, -5, -2, -2)$, $d_3 = (0, 2, 0, 1)$ и $j = 1, 2, 3$. Базис ядра оператора $\mathcal{A}$ состоит из одного вектора $h = (-1, 2, 1, 0)$.

Чтобы найти прообраз вектора $x = (0, -1, 4, -4)$, разложим x по базису (c_1, c_2, c_3) образа оператора $\mathcal{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x = -c_2 - 4c_3 = \mathcal{A}(-d_2 - 4d_3) = \mathcal{A}(0, -3, 2, -2)$. Положим $f = (0, -3, 2, -2)$, тогда $\mathcal{A}f = x$.

Докажем, что $\mathcal{A}^{-1}(x) = f + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Пусть $z \in f + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, т.е. $z = f + k$ для некоторого $k \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}z = \mathcal{A}f + \mathcal{A}k = x$, и $z \in \mathcal{A}^{-1}(x)$. Значит, $f + \mathrm{Ker}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{-1}(x)$. Если $z \in \mathcal{A}^{-1}(x)$, то $\mathcal{A}z = x = \mathcal{A}f$, и $\mathcal{A}(z - f) = 0_V$, т.е. $z - f \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и $z \in f + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}(x) \subseteq f + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и равенство $\mathcal{A}^{-1}(x) = f + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ доказано.

Полный прообраз $\mathcal{A}^{-1}(x) = f + \langle h \rangle = (0, -3, 2, -2) + \langle(-1, 2, 1, 0)\rangle$.

По определению сюръективности линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ является сюръективным тогда и только тогда, когда Im$\mathcal{A} = V$.

Предложение

Линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ является инъективным тогда и только тогда, когда Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$.

$\Downarrow$ Если отображение $\mathcal{A}$ инъективно, то по определению Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$.
Пусть Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$. Если $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$ для некоторых $x, y \in U$, то $\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0_V$, и $\mathcal{A}(x - y) = 0_V$, т.е. $x - y \in$ Ker$\mathcal{A}$. Значит, $x - y = 0_U$ и $x = y$. Следовательно, отображение $\mathcal{A}$ инъективно. $\Uparrow$

Лемма

Линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ инъективно тогда и только тогда, когда для любой линейно независимой системы $(u_1, \ldots, u_k)$ векторов из U система $(\mathcal{A}u_1, \ldots, \mathcal{A}u_k)$ векторов из V также линейно независима.

$\Downarrow$Если $\mathcal{A}$ инъективно, то $U \cap$ Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$, и требуемое следует из предложения сл.9. Обратно, если $b \in U$ и $b \neq 0_U$, то система из одного вектора b линейно независима и следовательно система $\mathcal{A}b$ линейно независима, т.е. $\mathcal{A}b \neq 0_V$. Поэтому Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$.$\Uparrow$

Изоморфизм

Определение изоморфизма см. на сл.11 §3 гл.I. Пусть U, V – линейные пространства над одним и тем же полем F. Из утверждения сл.18 получаем

Предложение

Линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ и $\mathrm{Im}\mathcal{A} = V$.

Определение

Говорят, что линейное пространство U *изоморфно* пространству V, если существует изоморфизм U на V.

Критерий изоморфности конечномерных пространств дает следующая

Теорема

Конечномерное пространство U изоморфно пространству V тогда и только тогда, когда $\mathrm{dim}U = \mathrm{dim}V$.

Доказательсто теоремы

$\Downarrow$ Пусть U, V изоморфны и $\mathcal{A}$ – изоморфизм U на V. Если $U = \{0_U\}$, то и $V = \{0_V\}$, так как $\mathcal{A}$ – биекция. Пусть $U \neq \{0_U\}$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис U. Поскольку Im$\mathcal{A} = V$, в силу предложения сл.3 имеем $V = \langle \mathcal{A}B \rangle$. По лемме сл.18 система $\mathcal{A}B$ линейно независима. Значит, эта система является базисом V и dim$U$ = dim$V$.

Пусть dim$U$ = dim$V$. Если dim$U = 0$, то $U = \{0_U\}$ и $V = \{0_V\}$, и $0_U \mapsto 0_V$ – изоморфизм U на V. Пусть dim$U = n > 0$. Выберем базисы $(b_1, \ldots, b_n)$ в U и $(c_1, \ldots, c_n)$ в V. Согласно теореме сл.7 §1 существует единственное линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ такое что $\mathcal{A}b_j = c_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ясно, что Im$\mathcal{A} = V$. Убедимся, что Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$. Пусть $x = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \in$ Ker$\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}x = 0_V$, т.е. $\lambda_1 \mathcal{A}b_1 + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}b_n = 0_V$ и $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_n c_n = 0_V$. Так как $(c_1, \ldots, c_n)$ – базис в V, заключаем, что $\lambda_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Следовательно, $x = 0_U$ и Ker$\mathcal{A} = \{0_U\}$. В силу предложения сл.19 отображение $\mathcal{A}$ является изоморфизмом. $\Uparrow$

Теорема

Пусть Пусть U, V – линейные пространства над одним и тем же полем F и $\mathrm{dim} U = \mathrm{dim} V$. Следующие условия эквивалентны для линейного отображения $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$:
(1) $\mathcal{A}$ является изоморфизмом;
(2) $\mathrm{Im}\mathcal{A} = V$ $(\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{dim} V)$;
(3) $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ $(\mathrm{d}(\mathcal{A}) = 0)$
(4) Матрица A отображения $\mathcal{A}$ относительно любой пары базисов является невырожденной;
(5) Матрица отображения $\mathcal{A}$ относительно некоторой пары базисов является невырожденной.

$\Downarrow$ Утверждения (2) и (3) эквивалентны в силу теоремы сл.10. Утверждение (1) эквивалентно одновременному выполнению условий (2) и (3) согласно предложению сл.19.
По утверждению (2) отображение $\mathcal{A}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\mathcal{A} = V$. Последнее условие в силу предложения сл.4 равносильно тому, что $\mathrm{r}(A) = \mathrm{dim} V$, т.е. что ранг матрицы A совпадает с ее порядком. Это возможно тогда и только тогда, когда A является невырожденной. Поэтому из (1) следует (4) и из (5) – (1). Утверждение (5) непосредственно следует из (4). $\Uparrow$

Из теоремы предыдущего слайда сразу получается

Следствие

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ на линейном пространстве U:
(1) $\mathcal{A}$ является изоморфизмом линейного пространства U на себя;
(2) $\mathrm{Im}\mathcal{A} = U$ $(\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{dim}U)$;
(3) $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ $(\mathrm{d}(\mathcal{A}) = 0)$.
(4) Матрица A оператора $\mathcal{A}$ относительно любого базиса является невырожденной;
(5) Матрица A оператора $\mathcal{A}$ относительно некоторого базиса является невырожденной.

Определение

Линейное отображение $\mathcal{A}$ линейного пространства U на линейное пространство V называется *обратимым*, если существует обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ (т.е. если $\mathcal{A}$ является изоморфизмом U на V).

Наблюдение

Обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ к линейному отображению $\mathcal{A}$ само является линейным отображением.

В самом деле, если $x, y \in V$, то $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x + \mathcal{A}^{-1}y) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x) + \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}y) =$ $= x + y$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(x + y) = \mathcal{A}^{-1}x + \mathcal{A}^{-1}y$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}^{-1}x)$.
Из теоремы сл.21 вытекает

Предложение

Следующие условия для линейного отображения $\mathcal{A}$ конечномерного линейного пространства U на линейное пространство V эквивалентны: (1) отображение $\mathcal{A}$ обратимо; (2) матрица отображения $\mathcal{A}$ относительно любой пары базисов невырожденная; (3) матрица отображения $\mathcal{A}$ относительно некоторой пары базисов невырожденная.

Прообраз подпространства при линейном отображении

Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение линейного пространства U в линейное пространство V над полем F.

Определение

Полным прообразом подпространства $V_1 \subseteq V$ при линейном отображении $\mathcal{A}$ называется множество $\{x \in U | \mathcal{A}x \in V_1\}$. Обозначение: $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$.

Предложение

Для любого подпространства $V_1 \subseteq V$ множество $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$ является подпространством в U и $\dim \mathcal{A}^{-1}(V_1) = \dim(V_1 \cap \operatorname{Im}\mathcal{A}) + \operatorname{d}(\mathcal{A})$.

$\Downarrow$ Пусть $V_1 \subseteq V$ – произвольное подпространство в V. Очевидно, что $0_U \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$. Пусть $x, y \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$, $\alpha \in F$. Тогда, поскольку $\mathcal{A}x, \mathcal{A}y \in V_1$ и V_1 – подпространство, имеем $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \in V_1$, т.е. $x + y \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$, и $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha(\mathcal{A}x) \in V_1$, т.е. $\alpha x \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$. Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$ – непустое подмножество в U, замкнутое относительно сложения векторов и умножения вектора на скаляр, т.е. подпространство. Второе утверждение предложения доказывается аналогично основной теореме (сл.10).

Окончание доказательства предложения

Если $V_1 = \{0_V\}$, то $\mathcal{A}^{-1}(V_1) = \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, и доказывать нечего. Пусть $V_1 \neq \{0_V\}$. Тогда $\mathcal{A}^{-1}(V_1) \supset \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \neq \{0_U\}$, то выберем в $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ базис $(e_1, \dots, e_m)$. Дополним его до базиса подпространства $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$ векторами $f_1, \dots, f_k$. Положим $\mathcal{A}f_j = g_j$ $(j = 1, \dots, k)$. Покажем, что $(g_1, \dots, g_k)$ – базис $V_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(V_1)) = V_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}$, очевидно, что $\langle g_1, \dots, g_k\rangle = V_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Поскольку $\langle f_1, \dots, f_k\rangle \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ и система $(f_1, \dots, f_k)$ линейно независима, система $(g_1, \dots, g_k)$ также линейно независима в силу предложения сл.9. Мы доказали, что $(g_1, \dots, g_k)$ – базис $V_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}$ и потому $\dim(V_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{A}) = k$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Из доказанного утверждения в качестве следствия получается теорема сл.10, если в качестве подпространства V_1 взять $\mathrm{Im}\mathcal{A}$, поскольку тогда $U = \mathcal{A}^{-1}(V_1)$.

Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение линейного пространства U на линейное пространство V над полем F. Как обычно, для любого подмножества $U_1 \subseteq U$ через $\mathcal{A}U_1$ обозначаем множество $\{y \in V | y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in U_1\}$ (*образ* U_1 при отображении $\mathcal{A}$).

Предложение

Для любой системы $(b_1, \ldots, b_n)$ векторов из U справедливо равенство $\mathcal{A}\langle b_1, \ldots, b_n\rangle = \langle \mathcal{A}b_1, \ldots, \mathcal{A}b_n\rangle$. Образ любого подпространства из U при линейном отображении является подпространством.

$\Downarrow$Так как $\mathcal{A}(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = \lambda_1(\mathcal{A}b_1) + \ldots + \lambda_n(\mathcal{A}b_n)$, справедливы включения $\mathcal{A}\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \subseteq \langle \mathcal{A}b_1, \ldots, \mathcal{A}b_n\rangle$ и $\langle \mathcal{A}b_1, \ldots, \mathcal{A}b_n\rangle \subseteq \mathcal{A}\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$.

Второе утверждение непосредственно следует из первого.$\Uparrow$

Предложение

Для любого подпространства $L \subseteq U$ справедливо равенство $\dim(\mathcal{A}L) = \dim L - \dim(L \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A})$.
При этом $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) = L + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

$\Downarrow$Первое утверждение может быть доказано аналогично теореме сл.10. Следует выбрать базис в $L \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и дополнить его до базиса L, а затем рассмотреть подпространство, порожденное образами векторов этого базиса пространства L.
Если $x \in \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L)$, то $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\ell$ для некоторого $\ell \in L$ и потому $\mathcal{A}(x - \ell) = 0_U$, т.е. $x - \ell \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и $x \in L + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) \subseteq L + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.
Если $x \in L + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}x \in \mathcal{A}L$, т.е. $x \in \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L)$. Таким образом, $L + \mathrm{Ker}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L)$ и равенство $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) = L + \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ доказано.$\Uparrow$