

Глава III. Линейные отображения

§ 2. Образ и ядро линейного отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

Определение

Образом отображения \mathcal{A} называется его область значений $E(\mathcal{A})$ (см. сл.2 §1 гл.III OA). Образ линейного отображения \mathcal{A} принято обозначать $\text{Im}\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}U$.

По определению имеет место равенство $\text{Im}\mathcal{A} = \{y \in V \mid \exists x \in U : \mathcal{A}x = y\}$.

Предложение

Пусть $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – произвольный базис пространства U , $A : U \rightarrow V$ – линейное отображение. Тогда образ A есть подпространство пространства V и $\text{Im} A = \langle AB \rangle = \langle Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \rangle$.

↓ Так как $A0_U = 0_V$, имеем $0_V \in \text{Im} A$. Пусть $y_1, y_2 \in \text{Im} A$. По определению $y_j = Ax_j$ ($j = 1, 2$) для некоторых $x_1, x_2 \in U$. Согласно определению линейного отображения имеем $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$, т.е. множество $\text{Im} A$ замкнуто относительно сложения. Для любого $\lambda \in F$ по определению линейного отображения имеем $A(\lambda x_1) = \lambda(Ax_1) = \lambda y_1$, т.е. множество $\text{Im} A$ замкнуто относительно умножения на скаляр. Согласно предложению сл.3 §4 гл.1 множество $\text{Im} A$ является подпространством.

Так как по определению $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \in \text{Im} A$ и $\text{Im} A$ является подпространством, в силу леммы сл.2 §4 гл.1 имеем $\langle Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \rangle \subseteq \text{Im} A$. Для доказательства обратного включения возьмем вектор $y \in \text{Im} A$. По определению $y = Ax$ для некоторого $x \in U$. Разложим x по базису B : $x = B \cdot [x]_B$. Тогда $y = Ax = A(B \cdot [x]_B) = (AB) \cdot [x]_B$, откуда следует, что $y \in \langle AB \rangle$. Таким образом, $\text{Im} A \subseteq \langle Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \rangle$, и утверждение доказано. ↑

Определение

Рангом линейного отображения \mathcal{A} называется размерность его образа:
 $r(\mathcal{A}) = \dim(\text{Im}\mathcal{A})$.

Из предложения сл.2 и предложения сл.12 §3 гл.I вытекает

Предложение

Пусть U, V – ненулевые конечномерные пространства над полем F и $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение. Тогда для любых базисов B пространства U и C пространства V имеет место равенство $r(\mathcal{A}) = r(A_{B,C})$, где $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A_{B,C}$.

Таким образом, ранг линейного отображения равен рангу его матрицы независимо от выбора базисов. То, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов, следует и из формулы сл.18 §1 в силу свойства 5 из теоремы сл.13 §1 гл.II.

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

Определение ядра линейного отображения

Ядром отображения \mathcal{A} называется полный прообраз нулевого подпространства $\{0_V\}$ при отображении \mathcal{A} . Обозначение: $\text{Ker}\mathcal{A}$.

Таким образом, $\text{Ker}\mathcal{A} = \{x \in U \mid \mathcal{A}x = 0_V\}$.

Предложение

Ядро любого линейного отображения линейного пространства U в линейное пространство V является подпространством в U .

↓ Пусть $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение. Воспользуемся предложением сл.3 §4 гл.1. Очевидно, что $0_U \in \text{Ker}\mathcal{A}$. Для любых $x, y \in \text{Ker}\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y = 0_V + 0_V = 0_V$, поэтому $x + y \in \text{Ker}\mathcal{A}$. Для любых $x \in \text{Ker}\mathcal{A}$ и $\lambda \in F$ справедливо $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}x) = \lambda 0_V = 0_V$, значит, $\lambda x \in \text{Ker}\mathcal{A}$. ↑

Определение дефекта линейного отображения

Дефектом линейного отображения \mathcal{A} называется размерность его ядра. Обозначение: $d(\mathcal{A})$. Таким образом, $d(\mathcal{A}) = \dim(\text{Ker}\mathcal{A})$.

Пример 1. Образ и ядро отображения из основного примера

Пусть F – поле, $k, n \in \mathbb{N}$, $U = F_n$, $V = F_k$, $A \in F^{k \times n}$. Положим $\mathcal{A}x = A \cdot x$ для любого столбца $x \in U$. Тогда $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

Предложение

Образ \mathcal{A} – линейная оболочка системы столбцов матрицы A ; ядро \mathcal{A} – множество всех столбцов из F_n , полученных транспонированием всех строк из пространства решений однородной системы линейных уравнений $A \cdot x = O$.

↓ Пусть $a_j \in F_k$, (a_1, \dots, a_n) – система столбцов матрицы A ,
 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top \in U$. Тогда $A \cdot x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n$, и
 $\text{Im } \mathcal{A} = \{A \cdot x \mid x \in F_n\} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in F_n \mid A \cdot x = O\}$. ↑

Пример 2. Образ и ядро отображения дифференцирования

Полагая $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$, для любого натурального числа n получаем линейное отображение $\mathcal{D} : VP_n(F) \rightarrow VP_{n-1}(F)$.

Наблюдение

Образ отображения дифференцирования – пространство $VP_{n-1}(F)$, его ядро – поле $F \subset VP_n(F)$.

Пример 3. Образ и ядро оператора проектирования на подпространство

Пусть n -мерное линейное пространство V над полем F разлагается в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$. Напомним, что оператором проектирования пространства V на подпространство U параллельно W называется отображение V на V , сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ его компоненту u на подпространство U параллельно W ($x = u + w$, $u \in U$, $w \in W$). Обозначение: $\mathcal{P}_{U\parallel W}$.

Наблюдение

$$\text{Im}\mathcal{P}_{U\parallel W} = U, \text{Ker}\mathcal{P}_{U\parallel W} = W.$$

Непосредственно следует из определения: $\mathcal{P}_{U\parallel W}(u + w) = u$.

Определение

Пусть U — подпространство линейного пространства V . Система векторов (b_1, b_2, \dots, b_k) называется **линейно независимой по модулю U** , если для любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ из условия $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k \in U$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Если $U_1 \subseteq U_2$, то из линейной независимости системы векторов по модулю U_2 следует ее линейная независимость по модулю U_1 .

Наблюдение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение и (b_1, b_2, \dots, b_k) – система векторов из U . Система $(\mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, \dots, \mathcal{A}b_k)$ линейно независима тогда и только тогда, когда система (b_1, b_2, \dots, b_k) линейно независима по модулю $\text{Ker}\mathcal{A}$.

$$\lambda_1 \mathcal{A}b_1 + \lambda_2 \mathcal{A}b_2 + \dots + \lambda_k \mathcal{A}b_k = 0_V \Leftrightarrow \mathcal{A}(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k) = 0_V \Leftrightarrow \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k \in \text{Ker}\mathcal{A}.$$

Предложение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение, и W – подпространство U такое, что $W \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$, $b_1, \dots, b_k \in W$. Если система (b_1, \dots, b_k) линейно независима, то и система $(\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_k)$ линейно независима.

↓ Пусть система (b_1, \dots, b_k) линейно независима. Тогда она линейно независима и по модулю $\text{Ker}\mathcal{A}$, так как если

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k \in \text{Ker}\mathcal{A}, \text{ то } \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k \in \text{Ker}\mathcal{A} \cap W \text{ и } \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k = 0_U.$$

Из наблюдения следует, что и система $(\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_k)$ линейно независима. ↑

Теорема

Пусть U, V – конечномерные линейные пространства над полем F , $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение. Тогда $r(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = \dim U$.

↓ Если $\text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0_U\}$, то выберем в $\text{Ker } \mathcal{A}$ базис (e_1, \dots, e_m) и дополним его до базиса пространства U системой векторов (f_1, \dots, f_k) . Если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$, то выберем в U базис (f_1, \dots, f_k) . Положим $g_j = \mathcal{A}f_j$ ($j = 1, \dots, k$) и покажем, что (g_1, \dots, g_k) – базис в подпространстве $\text{Im } \mathcal{A}$. Из предложения сл.3 следует, что система (g_1, \dots, g_k) порождает $\text{Im } \mathcal{A}$. Так как по построению $\langle f_1, \dots, f_k \rangle \cap \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$ и система (f_1, \dots, f_k) линейно независима, система (g_1, \dots, g_k) также линейно независима в силу предложения сл.9. Мы убедились, что (g_1, \dots, g_k) – базис $\text{Im } \mathcal{A}$. Значит, $\dim U = m + k = \dim(\text{Ker } \mathcal{A}) + \dim(\text{Im } \mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$, что и требуется доказать. ↑

Приведем два алгоритма нахождения базисов образа и ядра линейного отображения. Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $B = (b_1, \dots, b_n)$ и $C = (c_1, \dots, c_k)$ – базисы U и V , $A: U \rightarrow V$ – линейное отображение, $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A$. Алгоритмы выдают координаты векторов базиса $\text{Ker} A$ в базисе B и координаты векторов базиса $\text{Im} A$ в базисе C .

Алгоритм 1

Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A_1 (нулевые строки можно отбросить). Из столбцов полученной матрицы выделим максимальную линейно независимую подсистему. Соответствующие столбцам этой системы столбцы матрицы A дадут координаты базисных векторов образа $\text{Im} A$ в базисе C . Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений $A_1 \cdot x = 0$ дает координаты базисных векторов ядра $\text{Ker} A$ в базисе B .

Так как столбцы матрицы A есть координатные столбцы порождающей системы подпространства $\text{Im} A$ в базисе C , обоснование первой части алгоритма получается из утверждения сл.7 §4 гл.I. Вторая часть работает правильно, так как $u \in \text{Ker} A \Leftrightarrow [Au] = 0 \Leftrightarrow A \cdot [u] = 0$. Однородная система линейных уравнений $A \cdot x = 0$ равносильна системе $A_1 \cdot x = 0$, поэтому ее фундаментальная система решений и дает координаты базисных векторов ядра $\text{Ker} A$ в базисе B .

ЯО алгоритм

Построим матрицу $(E_n|A^T)$ размеров $n \times (n+k)$ и с помощью элементарных преобразований строк приведем эту матрицу к виду $(M|A_1)$, где A_1 – ступенчатая по строкам матрица, полученная на месте матрицы A^T . Тогда ненулевые строки матрицы A_1 дают координаты базисных векторов образа $\text{Im}A$ в базисе C , а строки матрицы M , имеющие нулевые продолжения в матрице A_1 , дают координаты базисных векторов ядра $\text{Ker}A$ в базисе B .

Этот алгоритм был предложен новосибирским алгебраистом Валерием Авдеевичем Чуркиным (р. 1946) в 1991 г.

Ненулевые строки матрицы A_1 дают координаты базисных векторов образа $\text{Im } \mathcal{A}$ в базисе C согласно утверждению о втором способе нахождения базиса подпространства (сл.7 §4 гл.1). Их количество равно $r(\mathcal{A})$.

Матрица $(E_n | A^T)$ имеет в качестве строк строки координат $([b_j]_B^T | [Ab_j]_C^T)$. При выполнении элементарных преобразований над строками этой матрицы получаем строки вида

$(\sum_{j=1}^n \lambda_j [b_j]_B^T | \sum_{j=1}^n \lambda_j [Ab_j]_C^T)$. Так как

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j [Ab_j]_C^T = \sum_{j=1}^n [\lambda_j (Ab_j)]_C^T = \sum_{j=1}^n [\mathcal{A}(\lambda_j b_j)]_C^T = [\mathcal{A}(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j)]_C^T$$

и $\sum_{j=1}^n \lambda_j [b_j]_B^T = [\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j]_B^T$, получаем строку вида $([u]_B^T | [\mathcal{A}u]_C^T)$.

Поэтому строки матрицы M , имеющие нулевые продолжения, являются строками координат векторов из $\text{Ker } \mathcal{A}$ в базисе B . Эти строки линейно независимы, так как получены с помощью элементарных преобразований из единичной матрицы. Их количество равно $n - r(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A})$. Согласно утверждению 2 теоремы сл.6 §3 гл.1 они дают координаты базисных векторов ядра $\text{Ker } \mathcal{A}$ в базисе B .

Пример применения алгоритма 1

Найти базисы образа и ядра линейного отображения, имеющего в

некотором базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Чтобы найти базис образа, проведем элементарные преобразования строк матрицы A (отбрасываем нулевые строки, если они получаются):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Видим, что первый и второй столбцы матрицы A дают координаты векторов базиса образа. Чтобы найти базис ядра, рассмотрим однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Запишем эту систему: } \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 - 2\xi_4 = 0, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0. \end{cases} \quad Ee$$

общее решение $\begin{cases} \xi_1 = \xi_3 + 2\xi_4, \\ \xi_2 = -2\xi_3 - 3\xi_4. \end{cases}$ Фундаментальная система решений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базис в ядре образуют векторы с координатами

$(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$.

Найти базисы образа и ядра линейного отображения, имеющего в

некотором базисе матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Таким образом, строки $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ дают координаты векторов базиса образа, а строки $(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$ – координаты векторов базиса ядра.

Пример 2 применения ЯО алгоритма

Доказать, что существует единственный линейный оператор \mathcal{A} , который переводит векторы $a_1 = (1, 0, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, -1, 0)$, $a_3 = (1, 2, 1, 0)$, $a_4 = (0, 1, 0, -1)$ в векторы $b_1 = (1, 0, 2, -1)$, $b_2 = (1, 1, -1, 2)$, $b_3 = (1, 0, 1, 0)$, $b_4 = (1, 1, 0, 1)$ соответственно. Найти базисы образа и ядра оператора \mathcal{A} , а также полный прообраз вектора $x = (0, -1, 4, -4)$ при действии оператора \mathcal{A} .

Согласно теореме существования и единственности линейного отображения (сл.8 §1 гл.II) для доказательства достаточно убедиться, что векторы a_1, a_2, a_3, a_4 образуют базис.

Для этого проверим, что они линейно независимы.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Чтобы найти базисы образа и ядра оператора \mathcal{A} , составим матрицу, приписав к каждому

вектору a_j его образ b_j ($j = 1, 2, 3, 4$):
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Базис образа оператора \mathcal{A} образуют векторы $c_1 = (1, 0, 1, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0, 0)$, $c_3 = (0, 0, -1, 1)$, при этом $\mathcal{A}d_j = c_j$ для $d_1 = (1, 2, 1, 0)$, $d_2 = (0, -5, -2, -2)$, $d_3 = (0, 2, 0, 1)$ и $j = 1, 2, 3$. Базис ядра оператора \mathcal{A} состоит из одного вектора $h = (-1, 2, 1, 0)$.

Чтобы найти прообраз вектора $x = (0, -1, 4, -4)$, разложим x по базису (c_1, c_2, c_3) образа оператора \mathcal{A} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x = -c_2 - 4c_3 = \mathcal{A}(-d_2 - 4d_3) = \mathcal{A}(0, -3, 2, -2)$. Положим $f = (0, -3, 2, -2)$, тогда $\mathcal{A}f = x$.

Докажем, что $\mathcal{A}^{-1}(x) = f + \text{Ker}\mathcal{A}$. Пусть $z \in f + \text{Ker}\mathcal{A}$, т.е. $z = f + k$ для некоторого $k \in \text{Ker}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}z = \mathcal{A}f + \mathcal{A}k = x$, и $z \in \mathcal{A}^{-1}(x)$. Значит, $f + \text{Ker}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{-1}(x)$. Если $z \in \mathcal{A}^{-1}(x)$, то $\mathcal{A}z = x = \mathcal{A}f$, и $\mathcal{A}(z - f) = 0_V$, т.е. $z - f \in \text{Ker}\mathcal{A}$ и $z \in f + \text{Ker}\mathcal{A}$.

Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}(x) \subseteq f + \text{Ker}\mathcal{A}$ и равенство $\mathcal{A}^{-1}(x) = f + \text{Ker}\mathcal{A}$ доказано.

Полный прообраз $\mathcal{A}^{-1}(x) = f + \langle h \rangle = (0, -3, 2, -2) + \langle (-1, 2, 1, 0) \rangle$.

По определению сюръективности линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ является сюръективным тогда и только тогда, когда $\text{Im}\mathcal{A} = V$.

Предложение

Линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ является инъективным тогда и только тогда, когда $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$.

↓ Если отображение \mathcal{A} инъективно, то по определению $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$. Пусть $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$. Если $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$ для некоторых $x, y \in U$, то $\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0_V$, и $\mathcal{A}(x - y) = 0_V$, т.е. $x - y \in \text{Ker}\mathcal{A}$. Значит, $x - y = 0_U$ и $x = y$. Следовательно, отображение \mathcal{A} инъективно. ↑

Лемма

Линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ инъективно тогда и только тогда, когда для любой линейно независимой системы (u_1, \dots, u_k) векторов из U система $(\mathcal{A}u_1, \dots, \mathcal{A}u_k)$ векторов из V также линейно независима.

↓ Если \mathcal{A} инъективно, то $U \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$, и требуемое следует из предложения сл.9. Обратное, если $b \in U$ и $b \neq 0_U$, то система из одного вектора b линейно независима и следовательно система $\mathcal{A}b$ линейно независима, т.е. $\mathcal{A}b \neq 0_V$. Поэтому $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$. ↑

Определение изоморфизма см. на сл.11 §3 гл.I. Пусть U, V – линейные пространства над одним и тем же полем F . Из утверждения сл.18 получаем

Предложение

Линейное отображение $A : U \rightarrow V$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\text{Ker}A = \{0_U\}$ и $\text{Im}A = V$.

Определение

Говорят, что линейное пространство U *изоморфно* пространству V , если существует изоморфизм U на V .

Критерий изоморфности конечномерных пространств дает следующая

Теорема

Конечномерное пространство U изоморфно пространству V тогда и только тогда, когда $\dim U = \dim V$.

↓ Пусть U, V изоморфны и \mathcal{A} – изоморфизм U на V . Если $U = \{0_U\}$, то и $V = \{0_V\}$, так как \mathcal{A} – биекция. Пусть $U \neq \{0_U\}$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис U . Поскольку $\text{Im } \mathcal{A} = V$, в силу предложения сл.3 имеем $V = \langle \mathcal{A}B \rangle$. По лемме сл.18 система $\mathcal{A}B$ линейно независима. Значит, эта система является базисом V и $\dim U = \dim V$.

Пусть $\dim U = \dim V$. Если $\dim U = 0$, то $U = \{0_U\}$ и $V = \{0_V\}$, и $0_U \mapsto 0_V$ – изоморфизм U на V . Пусть $\dim U = n > 0$. Выберем базисы (b_1, \dots, b_n) в U и (c_1, \dots, c_n) в V . Согласно теореме сл.7 §1 существует единственное линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ такое что $\mathcal{A}b_j = c_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Ясно, что $\text{Im } \mathcal{A} = V$. Убедимся, что $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$. Пусть $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \in \text{Ker } \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}x = 0_V$, т.е. $\lambda_1 \mathcal{A}b_1 + \dots + \lambda_n \mathcal{A}b_n = 0_V$ и $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n = 0_V$. Так как (c_1, \dots, c_n) – базис в V , заключаем, что $\lambda_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$). Следовательно, $x = 0_U$ и $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$. В силу предложения сл.19 отображение \mathcal{A} является изоморфизмом. ↑

Теорема

Пусть U, V – линейные пространства над одним и тем же полем F и $\dim U = \dim V$. Следующие условия эквивалентны для линейного отображения $\mathcal{A} : U \rightarrow V$:

- (1) \mathcal{A} является изоморфизмом;
- (2) $\text{Im } \mathcal{A} = V$ ($r(\mathcal{A}) = \dim V$);
- (3) $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$ ($d(\mathcal{A}) = 0$);
- (4) Матрица A отображения \mathcal{A} относительно любой пары базисов является невырожденной;
- (5) Матрица отображения \mathcal{A} относительно некоторой пары базисов является невырожденной.

↓ Утверждения (2) и (3) эквивалентны в силу теоремы сл.10. Утверждение (1) эквивалентно одновременному выполнению условий (2) и (3) согласно предложению сл.19.

По утверждению (2) отображение \mathcal{A} является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\text{Im } \mathcal{A} = V$. Последнее условие в силу предложения сл.4 равносильно тому, что $r(A) = \dim V$, т.е. что ранг матрицы A совпадает с ее порядком. Это возможно тогда и только тогда, когда A является невырожденной. Поэтому из (1) следует (4) и из (5) – (1). Утверждение (5) непосредственно следует из (4). ↑

Из теоремы предыдущего слайда сразу получается

Следствие

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора \mathcal{A} на линейном пространстве U :

- (1) \mathcal{A} является изоморфизмом линейного пространства U на себя;
- (2) $\text{Im}\mathcal{A} = U$ ($r(\mathcal{A}) = \dim U$);
- (3) $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ ($d(\mathcal{A}) = 0$).
- (4) Матрица A оператора \mathcal{A} относительно любого базиса является невырожденной;
- (5) Матрица A оператора \mathcal{A} относительно некоторого базиса является невырожденной.

Определение

Линейное отображение \mathcal{A} линейного пространства U на линейное пространство V называется *обратимым*, если существует обратное отображение \mathcal{A}^{-1} (т.е. если \mathcal{A} является изоморфизмом U на V).

Наблюдение

Обратное отображение \mathcal{A}^{-1} к линейному отображению \mathcal{A} само является линейным отображением.

В самом деле, если $x, y \in V$, то $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x + \mathcal{A}^{-1}y) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x) + \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}y) = x + y$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(x + y) = \mathcal{A}^{-1}x + \mathcal{A}^{-1}y$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}^{-1}x)$.

Из теоремы сл.21 вытекает

Предложение

Следующие условия для линейного отображения \mathcal{A} конечномерного линейного пространства U на линейное пространство V эквивалентны:
(1) отображение \mathcal{A} обратимо; (2) матрица отображения \mathcal{A} относительно любой пары базисов невырожденная; (3) матрица отображения \mathcal{A} относительно некоторой пары базисов невырожденная.

Пусть $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение линейного пространства U в линейное пространство V над полем F .

Определение

Полным прообразом подпространства $V_1 \subseteq V$ при линейном отображении \mathcal{A} называется множество $\{x \in U \mid \mathcal{A}x \in V_1\}$. Обозначение: $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$.

Предложение

Для любого подпространства $V_1 \subseteq V$ множество $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$ является подпространством в U и $\dim \mathcal{A}^{-1}(V_1) = \dim(V_1 \cap \text{Im} \mathcal{A}) + d(\mathcal{A})$.

↓ Пусть $V_1 \subseteq V$ – произвольное подпространство в V . Очевидно, что $0_U \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$. Пусть $x, y \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$, $\alpha \in F$. Тогда, поскольку $\mathcal{A}x, \mathcal{A}y \in V_1$ и V_1 – подпространство, имеем $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \in V_1$, т.е. $x + y \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$, и $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha(\mathcal{A}x) \in V_1$, т.е. $\alpha x \in \mathcal{A}^{-1}(V_1)$. Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$ – непустое подмножество в U , замкнутое относительно сложения векторов и умножения вектора на скаляр, т.е. подпространство. Второе утверждение предложения доказывается аналогично основной теореме (сл.10).

Если $V_1 = \{0_V\}$, то $\mathcal{A}^{-1}(V_1) = \text{Ker}\mathcal{A}$, и доказывать нечего. Пусть $V_1 \neq \{0_V\}$. Тогда $\mathcal{A}^{-1}(V_1) \supset \text{Ker}\mathcal{A}$. Если $\text{Ker}\mathcal{A} \neq \{0_U\}$, то выберем в $\text{Ker}\mathcal{A}$ базис (e_1, \dots, e_m) . Дополним его до базиса подпространства $\mathcal{A}^{-1}(V_1)$ векторами f_1, \dots, f_k . Положим $\mathcal{A}f_j = g_j$ ($j = 1, \dots, k$). Покажем, что (g_1, \dots, g_k) – базис $V_1 \cap \text{Im}\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(V_1)) = V_1 \cap \text{Im}\mathcal{A}$, очевидно, что $\langle g_1, \dots, g_k \rangle = V_1 \cap \text{Im}\mathcal{A}$. Поскольку $\langle f_1, \dots, f_k \rangle \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ и система (f_1, \dots, f_k) линейно независима, система (g_1, \dots, g_k) также линейно независима в силу предложения сл.9. Мы доказали, что (g_1, \dots, g_k) – базис $V_1 \cap \text{Im}\mathcal{A}$ и потому $\dim(V_1 \cap \text{Ker}\mathcal{A}) = k$. Предложение доказано. \uparrow

Из доказанного утверждения в качестве следствия получается теорема сл.10, если в качестве подпространства V_1 взять $\text{Im}\mathcal{A}$, поскольку тогда $U = \mathcal{A}^{-1}(V_1)$.

Пусть $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение линейного пространства U на линейное пространство V над полем F . Как обычно, для любого подмножества $U_1 \subseteq U$ через $\mathcal{A}U_1$ обозначаем множество $\{y \in V \mid y = \mathcal{A}x \text{ для некоторого } x \in U_1\}$ (**образ** U_1 при отображении \mathcal{A}).

Предложение

Для любой системы (b_1, \dots, b_n) векторов из U справедливо равенство $\mathcal{A}\langle b_1, \dots, b_n \rangle = \langle \mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_n \rangle$. Образ любого подпространства из U при линейном отображении является подпространством.

↓ Так как $\mathcal{A}(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1(\mathcal{A}b_1) + \dots + \lambda_n(\mathcal{A}b_n)$, справедливы включения $\mathcal{A}\langle b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_n \rangle$ и $\langle \mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_n \rangle \subseteq \mathcal{A}\langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

Второе утверждение непосредственно следует из первого. ↑

Предложение

Для любого подпространства $L \subseteq U$ справедливо равенство $\dim(\mathcal{A}L) = \dim L - \dim(L \cap \text{Ker} \mathcal{A})$.

При этом $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) = L + \text{Ker} \mathcal{A}$.

↓ Первое утверждение может быть доказано аналогично теореме сл.10. Следует выбрать базис в $L \cap \text{Ker} \mathcal{A}$ и дополнить его до базиса L , а затем рассмотреть подпространство, порожденное образами векторов этого базиса пространства L .

Если $x \in \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L)$, то $\mathcal{A}x = \mathcal{A}\ell$ для некоторого $\ell \in L$ и потому $\mathcal{A}(x - \ell) = 0_U$, т.е. $x - \ell \in \text{Ker} \mathcal{A}$ и $x \in L + \text{Ker} \mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) \subseteq L + \text{Ker} \mathcal{A}$.

Если $x \in L + \text{Ker} \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}x \in \mathcal{A}L$, т.е. $x \in \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L)$. Таким образом, $L + \text{Ker} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L)$ и равенство $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}L) = L + \text{Ker} \mathcal{A}$ доказано. ↑