Глава III. Линейные отображения
§ 1. Понятие линейного отображения. Матрица в базисах

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть U, V – линейные пространства над полем F.

Определение линейного отображения

Отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ называется *линейным*, если выполняются следующие условия:

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ для любых $x, y \in U$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}(x))$ для любых $x \in U$, $\lambda \in F$.

Условие 1 называется *аддитивностью*, условие 2 – *однородностью* отображения $\mathcal{A}$.

Определение линейного оператора

Линейное отображение $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ линейного пространства V в само себя называется *линейным оператором* на пространстве V.

Для простоты будем писать $\mathcal{A}x$ вместо $\mathcal{A}(x)$, если это не вызовет двусмысленности.

Оператор поворота на плоскости

Пусть π – плоскость, φ – угол. Положим $\mathcal{R}_\varphi \vec{x} = \vec{y}$, где вектор $\vec{y}$ получается из вектора $\vec{x} \in V_\pi$ поворотом на угол φ против часовой стрелки, если $\vec{x} \neq \vec{0}$, и $\vec{y} = \vec{0}$ при $\vec{x} = \vec{0}$. Тогда $\mathcal{R}_\varphi : V_\pi \longrightarrow V_\pi$ – линейный оператор.

Отображение проектирования на плоскость параллельно вектору

Пусть π – плоскость, $\vec{b} \in V_g$ – вектор и $\vec{b} \not\parallel \pi$. Положим $\mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} \vec{x} = \vec{y}$, где вектор $\vec{y}$ – компонента вектора $\vec{x}$ на плоскость π параллельно вектору $\vec{b}$. Тогда $\mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} : V_g \to V_\pi$ – линейное отображение.

Вектор $\vec{y}$ можно определить как вектор $\vec{x} - \tau \vec{b}$ $(\tau \in \mathbb{R})$, компланарный плоскости π.

Оператор симметрии относительно плоскости

Пусть π – плоскость. $\mathcal{S}_\pi \vec{x} = \vec{y}$, где вектор $\vec{y}$ – симметричный к $\vec{x}$ относительно плоскости π. Тогда $\mathcal{S}_\pi : V_g \longrightarrow V_g$ – линейный оператор.

Проверка линейности указанных отображений производится с использованием элементарных геометрических утверждений.

Основной пример

Пусть F – поле, $k, n \in \mathbb{N}$, $U = F_n$, $V = F_k$, $A \in F^{k\times n}$. Положим $\mathcal{A}x = A \cdot x$ для любого столбца $x \in U$. Тогда $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Умножение на матрицы

Пусть F – поле, $k, n, \ell, p \in \mathbb{N}$, $U = F^{k\times n}$, $V = F^{\ell\times p}$, $A \in F^{\ell\times k}$, $B \in F^{n\times p}$. Положим $\mathcal{M}_{A,B}X = A \cdot X \cdot B$ для любой матрицы $X \in U$. Тогда $\mathcal{M}_{A,B} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Линейность этих отображений следует из свойств операций над матрицами (сл.7 §1 гл.I ОА).

Первый из примеров этого слайда описывает в некотором смысле любое линейное отображение конечномерных линейных пространств (см. сл.20 ниже).

Изоморфизм

Любой изоморфизм одного линейного пространства на другое (определение см. на сл.11 §3 гл.I) является линейным отображением.

Нулевое отображение

Пусть V и W – линейные пространства над полем F. Отображение $\mathcal{O} : V \longrightarrow W$, $\mathcal{O}x = 0_W$ для любого $x \in V$ является линейным и называется *нулевым линейным отображением пространства V на W*.

Единичный оператор

Пусть V – линейное пространство над полем F. Отображение $\mathcal{E} : V \longrightarrow V$, $\mathcal{E}x = x$ для любого $x \in V$ является линейным и называется *единичным оператором пространства V*.

Примеры 4. Дифференцирование

Оператор дифферецирования

Пусть F – поле. Положим $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$. Получаем линейные операторы $\mathcal{D} : F[x] \longrightarrow F[x]$ и $\mathcal{D} : VP_n(F) \longrightarrow VP_n(F)$ для любого натурального числа n (определение линейного пространства $VP_n(F)$ см. на сл.6 §1 гл.I).

Отображение дифферецирования

Полагая $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$, для любого натурального числа n получаем линейное отображение $\mathcal{D} : VP_n(F) \longrightarrow VP_{n-1}(F)$.

Линейность дифференцирования следует из свойств производной многочлена (см. сл.2 §3 гл.IV ОА).

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Предложение

1. $\mathcal{A}0_U = 0_V$;
2. $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m) = \lambda_1 \mathcal{A}u_1 + \ldots + \lambda_m \mathcal{A}u_m$ для любых векторов $u_1, \ldots, u_m \in U$ и любых скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$.

Имеем $\mathcal{A}0_U = \mathcal{A}(0 \cdot 0_U) = 0\mathcal{A}(0_U) = 0_V$. Второе утверждение следует из определения линейного отображения:
$\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m) = \mathcal{A}(\lambda_1 u_1) + \ldots + \mathcal{A}(\lambda_m u_m) = \lambda_1 \mathcal{A}u_1 + \ldots + \lambda_m \mathcal{A}u_m$.

Пусть $C = (c_1, \ldots, c_m)$ – система векторов из U. Обозначим через $\mathcal{A}C$ систему $(\mathcal{A}c_1, \ldots, \mathcal{A}c_m)$ из образов этих векторов при отображении $\mathcal{A}$. Пусть $\Gamma \in F^{m \times p}$ – матрица из скаляров. Тогда из утверждения 2 предложения с учетом матричной записи линейных комбинаций (см. сл.10 §1 гл.I) получаем

$$\mathcal{A}(C \cdot \Gamma) = (\mathcal{A}C) \cdot \Gamma. \qquad (1)$$

Теорема

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U. Тогда для любой системы векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ пространства V существует единственное линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ такое что $\mathcal{A}b_j = v_j$ для $j = 1, \ldots, n$.

$\Downarrow$ Возьмем вектор $x \in U$ и разложим его по базису B: $x = \xi_1 b_1 + \ldots + \xi_n b_n$. Положим $\mathcal{A}x = \xi_1 v_1 + \ldots + \xi_n v_n$. В силу единственности разложения вектора по базису получаем отображение линейного пространства U на подпространство $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Имеем $\mathcal{A}x = (v_1, \ldots, v_n)[x]_B = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B$. В силу свойств координат (сл.10 §3 гл.I) отображение $\mathcal{A}$ является линейным. Очевидно, что $\mathcal{A}b_j = v_j$ для $j = 1, \ldots, n$.
Докажем единственность. Пусть $\mathcal{A}' : U \longrightarrow V$ – произвольное линейное отображение такое что $\mathcal{A}'b_j = v_j$ для $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathcal{A}'B = \mathcal{A}B$. Для любого $x \in U$ в силу равенства (1) сл.7 имеем
$\mathcal{A}'x = \mathcal{A}'(B \cdot [x]_B) = (\mathcal{A}'B) \cdot [x]_B = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B = \mathcal{A}x$ и потому $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. $\Uparrow$

Матрица линейного отображения

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U, $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базис пространства V. Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V. Разложим вектор $\mathcal{A}b_j$ по базису C:

$$\mathcal{A}b_j = \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \ldots + \alpha_{kj}c_k, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Определение

Матрицей линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C называется матрица $(\alpha_{ij})_{k \times n}$, составленная из столбцов координат векторов $\mathcal{A}b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ в базисе C.

Обозначается матрица линейного отображения в базисах через $A_{B,C}$.
Будем использовать также обозначение $\mathcal{A} \longleftrightarrow_{B,C} A$.
Равенства (2) можно записать в матричном виде:

$$\mathcal{A}B = C \cdot A_{B,C}. \tag{3}$$

Отметим, что матрица линейного отображения в базисах является матрицей размеров $k \times n$, где $n = \dim U$, $k = \dim V$.

Матрица линейного оператора

Пусть V – линейное пространство над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства V и пусть $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ – линейный оператор пространства V. В случае линейного оператора матрица определяется с помощью одного базиса:

$$\mathcal{A}b_j = \alpha_{1j}b_1 + \alpha_{2j}b_2 + \ldots + \alpha_{nj}b_n, \; j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Определение

Матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B называется матрица $(\alpha_{ij})_{n\times n}$, составленная из столбцов координат векторов $\mathcal{A}b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ в базисе B.

Обозначается матрица линейного оператора в базисе через A_B. Будем использовать также обозначение $\mathcal{A} \longleftrightarrow_B A$.
Равенства (4) можно записать в матричном виде:

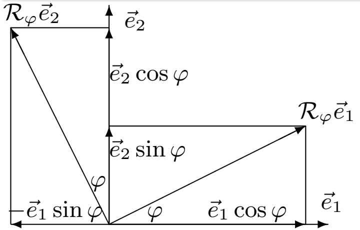
$$\mathcal{A}B = B \cdot A_B. \tag{5}$$

Отметим, что матрица линейного оператора в базисе является квадратной матрицей порядка $n = \dim V$.

Оператор поворота определен на сл.3.

Матрица оператора поворота

Выберем на плоскости ортонормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда матрица оператора поворота $\mathcal{R}_\varphi$ в этом базисе имеет вид $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



Длина векторов $\mathcal{R}_\varphi\vec{e}_1$ и $\mathcal{R}_\varphi\vec{e}_2$ равна 1. Разлагая их по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, получаем $\mathcal{R}_\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi$, $\mathcal{R}_\varphi\vec{e}_2 = -\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi$.

Примеры. Матрица отображения проектирования на плоскость параллельно вектору

Определение см. на сл.3. Пусть π – плоскость. Рассматривая отображение проектирования на пространство V_π параллельно вектору $\vec{b}$, выберем в пространстве V_g базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а в пространстве V_π векторов на плоскости π – базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Тогда, очевидно, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$ – базис пространства V_g. Имеем

$$\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{a}_1 + \alpha_{21}\vec{a}_2 + \alpha_{31}\vec{b} \Rightarrow \mathcal{P}_{\pi\|\vec{b}}\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{a}_1 + \alpha_{21}\vec{a}_2,$$

$$\vec{e}_2 = \alpha_{12}\vec{a}_1 + \alpha_{22}\vec{a}_2 + \alpha_{32}\vec{b} \Rightarrow \mathcal{P}_{\pi\|\vec{b}}\vec{e}_2 = \alpha_{12}\vec{a}_1 + \alpha_{22}\vec{a}_2,$$

$$\vec{e}_3 = \alpha_{13}\vec{a}_1 + \alpha_{23}\vec{a}_2 + \alpha_{33}\vec{b} \Rightarrow \mathcal{P}_{\pi\|\vec{b}}\vec{e}_3 = \alpha_{13}\vec{a}_1 + \alpha_{23}\vec{a}_2.$$

Матрица отображения проектирования на плоскость параллельно вектору

$$P_{\pi\|\vec{b}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Определение см. на сл.3. Пусть π – плоскость. Выберем в пространстве V_g базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ так, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ компланарны плоскости π (т.е. $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_\pi$) и $\vec{e}_3 \perp \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\pi \vec{e}_1 &= \vec{e}_1, \\ \mathcal{S}_\pi \vec{e}_2 &= \vec{e}_2, \\ \mathcal{S}_\pi \vec{e}_3 &= -\vec{e}_3. \end{aligned}$$

$$S_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Определение см. на сл.4. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$. Выберем в пространствах F_n и F_k стандартные базисы (состоящие из столбцов единичных матриц E_n и E_k соответственно, взятых по порядку). Обозначим столбцы матрицы E_n через $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, а столбцы матрицы E_k – через $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$. Тогда, так как $Ae_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{kj})^\top$, получаем

$$\mathcal{A}e_j = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \ldots + \alpha_{kj}f_k.$$

Следовательно, матрица отображения $\mathcal{A}$ имеет вид $(\alpha_{ij})_{k\times n}$, т.е. совпадает с исходной матрицей A. Это обозначение согласуется с нашей договоренностью о соответствии обозначений отображения и его матрицы.

Определение см. на сл.4. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{\ell\times k}$, $B = (\beta_{ij})_{n\times p}$. Выберем в пространствах $F^{k\times n}$ и $F^{\ell\times p}$ базисы, состоящие из матричных единиц $\boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n}$ и $\boldsymbol{e}^{i,j}_{\ell\times p}$, расположенных в порядке $\boldsymbol{e}^{1,1}_{k\times n}, \boldsymbol{e}^{1,2}_{k\times n}, \ldots, \boldsymbol{e}^{1,n}_{k\times n}$, $\boldsymbol{e}^{2,1}_{k\times n}, \boldsymbol{e}^{2,2}_{k\times n}, \ldots, \boldsymbol{e}^{2,n}_{k\times n}, \ldots, \boldsymbol{e}^{k,1}_{k\times n}, \boldsymbol{e}^{k,2}_{k\times n}, \ldots, \boldsymbol{e}^{k,n}_{k\times n}$ и во втором базисе в таком же порядке (по строкам). По определению произведения матриц

$$\boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n} \cdot \boldsymbol{e}^{s,t}_{n\times p} = \begin{cases} \boldsymbol{e}^{i,t}_{k\times p}, & \text{если } j = s; \\ O_{k\times p}, & \text{если } j \neq s. \end{cases}$$

Так как $\mathcal{M}_{A,B}\boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n} = A \cdot \boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n} \cdot B =$

$$= \left(\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{k} \alpha_{sq}\boldsymbol{e}^{s,q}_{\ell\times k}\right) \cdot \boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n} \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} \beta_{rt}\boldsymbol{e}^{r,t}_{n\times p}\right) =$$

$$\left(\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{q=1}^{k} \alpha_{sq}\boldsymbol{e}^{s,q}_{\ell\times k} \cdot \boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n}\right) \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} \beta_{rt}\boldsymbol{e}^{r,t}_{n\times p}\right) =$$

$$\left(\sum_{s=1}^{\ell} \alpha_{si}\boldsymbol{e}^{s,j}_{\ell\times n}\right) \cdot \left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} \beta_{rt}\boldsymbol{e}^{r,t}_{n\times p}\right) = \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{p} \alpha_{si}\beta_{jt}\boldsymbol{e}^{s,t}_{\ell\times p},$$ получаем

$$\mathcal{M}_{A,B}\boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n} = \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{p} \alpha_{si}\beta_{jt}\boldsymbol{e}_{s,t;\ell\times p}.$$

Окончание примера

Следовательно, матрица отображения $\mathcal{M}_{A,B}$ в рассматриваемых базисах имеет вид

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \dots & \alpha_{11}\beta_{n1} & \alpha_{12}\beta_{11} & \dots & \alpha_{12}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{11}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{11}\beta_{np} & \alpha_{12}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{12}\beta_{np} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\ell 1}\beta_{11} & \dots & \alpha_{\ell 1}\beta_{n1} & \alpha_{\ell 2}\beta_{11} & \dots & \alpha_{\ell 2}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{11} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\ell 1}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{\ell 1}\beta_{np} & \alpha_{\ell 2}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{\ell 2}\beta_{np} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{np} \end{pmatrix}.$$

Матрицы нулевого отображения и единичного оператора

Матрица нулевого отображения в любых базисах – нулевая.

Матрица единичного оператора в любом базисе – единичная.

Возьмем в пространстве $VP_n(F)$ базис $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Так как $(x^k)' = kx^{k-1}$, получаем равенство

Матрица оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве $VP_n(F)$

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как линейное пространство $F[x]$ не является конечномерным, для оператора дифференцирования на этом пространстве матрица не определена.

Возьмем в пространстве $VP_n(F)$ базис $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$, а в пространстве $VP_{n-1}(F)$ – базис $C = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$

Матрица отображения дифференцирования $\mathcal{D}_1 : VP_n(F) \longrightarrow VP_{n-1}(F)$

$$D_{1BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Координаты образа вектора

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U, $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базис пространства V. Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V и $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A_{B,C}$, т.е. $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C. Найдем координаты образа вектора $\mathcal{A}x$ в базисе C, считая известными координаты вектора x в базисе B. Так как $x = B[x]_B$ (см. формулу (2) сл.9 §3 гл.I), в силу формулы (1) сл.7 имеем $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(B \cdot [x]_B) = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B = (C \cdot A_{B,C}) \cdot [x]_B = C \cdot (A_{B,C} \cdot [x]_B)$, поэтому $\mathcal{A}x = C \cdot (A_{B,C} \cdot [x]_B)$. В силу единственности координат имеем

Формула для координат образа вектора

$$[\mathcal{A}x]_C = A_{B,C} \cdot [x]_B.$$

Полученная формула совпадает с формулой из определения отображения в основном примере на сл.4. Это объясняет название "основной пример".

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V. Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U, $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базис пространства V и $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C. Предположим, что в пространствах U и V заданы другие базисы $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ и $C' = (c'_1, \ldots, c'_k)$. Как связаны между собой матрицы $A_{B,C}$ и $A_{B',C'}$? Будем считать известными матрицы перехода T от базиса B к базису B' и S от базиса C к базису C'. Таким образом, $B' = B \cdot T$ и $C' = C \cdot S$. Из равенства $\mathcal{A}B = C \cdot A_{B,C}$ получаем $\mathcal{A}B' = \mathcal{A}(B \cdot T) = (\mathcal{A}B) \cdot T = (C \cdot A_{B,C}) \cdot T = C \cdot (A_{B,C} \cdot T)$. С другой стороны, из равенства $\mathcal{A}B' = C' \cdot A_{B',C'}$ следует $\mathcal{A}B' = C' \cdot A_{B',C'} = (C \cdot S) \cdot A_{B',C'} = C \cdot (S \cdot A_{B',C'})$. Таким образом, $C \cdot (A_{B,C} \cdot T) = C \cdot (S \cdot A_{B',C'})$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем $A_{B,C} \cdot T = S \cdot A_{B',C'}$. Так как матрица перехода S является обратимой, из последнего равенства получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы линейного отображения при изменении базисов

$$A_{B',C'} = S^{-1} \cdot A_{B,C} \cdot T.$$

Применяя формулу сл.21 к случаю линейного оператора $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ линейного V пространства над полем F, получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса

$$A_{B'} = T^{-1} \cdot A_B \cdot T.$$

В этой формуле B и B' – базисы пространства V, T – матрица перехода T от базиса B к базису B'.

Определение

Пусть F – поле и A, A' – матрицы из $F^{n\times n}$. Говорят, что матрица A' *подобна* матрице A, если существует обратимая матрица $T \in F^{n\times n}$ такая что $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$. Обозначение: $A' \backsim A$.

Предложение

Отношение подобия является отношением эквивалентности на множестве квадратных матриц порядка n над полем F.

$\Downarrow$ Рефлексивность указанного отношения очевидна: нужно взять $T = E_n$, получим $A \backsim A$ для любой $A \in F^{n\times n}$. Симметричность этого отношения также очевидна: если $A' \backsim A$, т.е. $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, то $A = T \cdot A' \cdot T^{-1}$, и, взяв $T_1 = T^{-1}$, получим $A = T_1^{-1} \cdot A' \cdot T_1$, т.е. $A \backsim A'$. Докажем транзитивность. Пусть $B \backsim A$ и $C \backsim B$, т.е. $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ и $C = S^{-1} \cdot B \cdot S$ для некоторых обратимых матриц $T, S \in F^{n\times n}$. Так как матрица $T \cdot S$ обратима и $(T \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot T^{-1}$, имеем
$C = S^{-1} \cdot B \cdot S = S^{-1} \cdot (T^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot S =$
$= (S^{-1} \cdot T^{-1}) \cdot A \cdot (T \cdot S) = (T \cdot S)^{-1} \cdot A \cdot (T \cdot S)$, т.е.
$C = (T \cdot S)^{-1} \cdot A \cdot (T \cdot S)$, откуда следует $C \backsim A$. $\Uparrow$

Связь отношения подобия с линейными операторами

Будучи отношением эквивалентности, отношение подобия, как следует из теоремы сл.5 §2 гл.III ОА, определяет разбиение множества $F^{n\times n}$ на классы подобных между собой матриц.
Рассмотрим линейное пространство V над полем F размерности n и выберем в нем некоторый базис B. Будем обозначать множество всех линейных операторов из V в себя через $\mathrm{H}(V)$. Сопоставим каждому линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ его матрицу A_B в базисе B.

Предложение

Класс подобных матриц $A_B^{\backsim}$ состоит из всех матриц линейного оператора $\mathcal{A}$ во всевозможных базисах пространства V.

$\Downarrow$ Пусть C – произвольный базис линейного пространства V. Тогда $\mathcal{A} \leftrightarrow_C A_C$ и согласно формуле слайда 22 $A_C \backsim A_B$, т.е. $A_C \in A_B^{\backsim}$.
Обратно, пусть $A_1 \in A_B^{\backsim}$. Тогда $A_1 = T^{-1} \cdot A_B \cdot T$. Рассмотрим систему векторов $B \cdot T$. Так как матрица T невырожденная, эта система в силу второго утверждения сл.16 §3 гл.I является базисом пространства V.
Оператор $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет матрицу A_1. $\Uparrow$

Операторы проектирования и отражения

Пусть n-мерное линейное пространство V над полем F разлагается в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$.

Определения

Оператором проектирования пространства V на подпространство U параллельно W называется отображение пространства V на себя, сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ его компоненту y на подпространство U параллельно W (см. сл.21 §4 гл.I). Обозначение: $\mathcal{P}_{U\|W}$.

Оператором отражения пространства V относительно подпространства U параллельно W называется отображение V на V, сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ вектор $y - z$, где y – его компонента на подпространство U параллельно W (см. сл.21 §4 гл.I), а $z = x - y$. Обозначение: $\mathcal{R}_{U\|W}$.

Матрицы операторов проектирования и отражения

Легко проверить, что операторы проектирования и отражения являются линейными. Их матрицы имеют наиболее простой вид в базисе пространства V, полученном объединением базиса $(u_1, \ldots, u_k)$ подпространства U и базиса $(w_1, \ldots, w_m)$ подпространства W. А именно, $\mathcal{P}_{U\|W} u_j = u_j$, $\mathcal{P}_{U\|W} w_s = 0_V$, $\mathcal{R}_{U\|W} u_j = u_j$, $\mathcal{R}_{U\|W} w_s = -w_s$ при $j = 1, \ldots, k$ и $s = 1 \ldots, m$. Таким образом, матрицы этих операторов – блочные диагональные и первым блоком является матрицей E_k; второй блок у матрицы оператора проектирования – нулевой, а у матрицы оператора отражения это матрица $-E_m$.