Глава I. Линейные пространства
§ 4 Подпространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Понятие подпространства

Пусть V – линейное пространство над полем F.

Определение

Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* пространства V, если U является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на скаляр, определенных в V.

Это в частности означает, что $U \neq \emptyset$, U замкнуто относительно сложения векторов ($\forall x, y \in U \; x + y \in U$) и U замкнуто относительно умножения векторов на любые скаляры ($\forall x \in U \; \forall \lambda \in F \; \lambda x \in U$).
Отсюда непосредственно следует

Лемма

Если векторы $a_1, \ldots, a_k$ принадлежат подпространству U, то $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \subseteq U$.

Необходимые и достаточные условия для подмножества быть подпространством

Предложение

Подмножество U линейного пространства V является подпространством тогда и только тогда, когда $U \neq \emptyset$, U замкнуто относительно сложения векторов и U замкнуто относительно умножения векторов на любые скаляры.

$\Downarrow$Если U является подпространством, то требуемые условия выполняются, как отмечено на сл.2.
Пусть U – непустое подмножество линейного пространства V, замкнутое относительно сложения векторов и относительно умножения векторов на любые скаляры. Убедимся, что для множества U и поля F выполняются все аксиомы сл.4 §1. Аксиомы 1 и 6 выполняются, так как на U определены операции пространства V. Аксиомы 2–3 и 7–10 выполняются, так как они содержат только кванторы всеобщности и выполняются в множестве V, содержащем U. Множество U содержит некоторый вектор x и потому содержит вектор $0_V = 0 \cdot x$, так что аксиома 4 также выполняется. Поскольку для любого $x \in U$ вектор $-x = (-1) \cdot x \in U$, аксиома 5 выполняется. Следовательно, для U и поля F выполняются все аксиомы сл.4 §1, т.е. U является линейным пространством.$\Uparrow$

Тривиальные подпространства

В любом линейном пространстве V подпространствами являются само V и $\{0_V\}$, называемые *тривиальными* подпространствами.

Подпространства пространства геометрических векторов

В линейном пространстве V_g подпространствами являются $\{\vec{0}\}$, V_ℓ, где ℓ – любая прямая, V_π, где π – любая плоскость, и само пространство V_g.

То, что V_ℓ и V_π являются линейными пространствами, отмечено на сл.4 §1.

Линейная оболочка

Пусть $(a_1, \ldots, a_k)$ – система векторов линейного пространства V. Тогда ее линейная оболочка $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ является подпространством в V.

Очевидно, что линейная оболочка любой системы векторов удовлетворяет всем условиям предложения сл.3. Поэтому линейную оболочку $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ называют *подпространством, порожденным системой векторов* $(a_1, \ldots, a_k)$. Говорят также, что система векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ *порождает* подпространство $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.

Примеры подпространств 2

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны нулю.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений

Множество всех частных решений однородной системы линейных уравнений с коэффициентами из поля F

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0; \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \ldots + \alpha_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

является подпространством арифметического пространства F^n.

$\Downarrow$ Запишем систему в матричном виде $A \cdot x = O$, где $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ – столбец неизвестных, O – нулевой столбец свободных членов. Тогда множество ее частных решений $U = \{c \in F^n | A \cdot c^\top = O\}$ содержит нулевую строку и замкнуто относительно сложения строк и умножения строки на любой скаляр: если $c, d \in U$, то $A \cdot (c + d)^\top = = A \cdot (c^\top + d^\top) = A \cdot c^\top + A \cdot d^\top = O + O = O$ и если $\lambda \in F$, то $A \cdot (\lambda c)^\top = A \cdot (\lambda c^\top) = \lambda(A \cdot c^\top) = \lambda O = O$. Согласно предложению сл.3 U является подпространством. $\Uparrow$

Теорема

Пусть V – линейное пространство размерности $n \geq 0$ над полем F. Тогда для любого подпространства $U \subseteq V$, $\dim U = k \leq n$ и если $k = n$, то $U = V$.

$\Downarrow$ Если $U = \{0_V\}$, то $\dim U = 0$. Если $\dim V = 0$, то $V = \{0_V\} = U$. Пусть $a_1 \in U$, $a_1 \neq 0_V$. Тогда $\langle a_1 \rangle \subseteq U$ в силу леммы сл.2. Если $\langle a_1 \rangle = U$, то $\dim U = 1$. В противном случае существует $a_2 \in U \backslash \langle a_1 \rangle$. Снова по лемме сл.2 имеем $\langle a_1, a_2 \rangle \subseteq U$. Так как $a_2 \notin \langle a_1 \rangle$, система (a_1, a_2) линейно независима в силу свойства 3' сл.7 §2. Если $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, то система (a_1, a_2) является базисом U и $\dim U = 2$. В противном случае существует $a_3 \in U \backslash \langle a_1, a_2 \rangle$. Процесс нахождения векторов a_j не может иметь более, чем n шагов, так как в пространстве V любая система из более чем n векторов линейно зависима согласно утверждению 1 теоремы сл.6 §3. Завершиться указанный процесс может только равенством $U = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ для некоторой линейно независимой системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Поэтому $\dim U = k$ и очевидно, что $k \leq n$.
Если $k = n$, то согласно утверждению 2 теоремы сл.6 §3 система $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является базисом пространства V. Следовательно, $U = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = V$ и $U = V$. $\Uparrow$

В силу теоремы предыдущего слайда имеет место следующая

Теорема

Все подпространства конечномерного линейного пространства исчерпываются линейными оболочками всевозможных систем векторов этого пространства.

В силу этого подпространства часто задаются как линейные оболочки систем векторов. Если порождающая система подпространства линейно независима, то она является базисом этого подпространства. В противном случае из порождающей системы можно выделить базис, используя алгоритм сл.14 §2 получения максимальной линейно независимой подсистемы данной (порождающей) системы векторов. Заметим, что размерность линейной оболочки системы векторов равна рангу этой системы.

Другой способ нахождения базиса подпространства по координатам векторов порождающей его системы состоит в том, что из строк координат составляется матрица и с помощью элементарных преобразований строк эта матрица приводится к ступенчатому по строкам виду. Ненулевые строки последней матрицы дают координаты базисных векторов подпространства.

Пример нахождения базиса подпространства – первый способ

Пусть $U \subseteq \mathbb{Q}^5$, $U = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$, где $a_1 = (1,2,3,4,5)$, $a_2 = (2,3,4,5,6)$, $a_3 = (3,4,5,6,7)$, $a_4 = (9,8,7,6,5)$. Найти какой-нибудь базис и определить размерность подпространства U.

Применяем алгоритм сл.14 §2 к системе векторов (a_1, a_2, a_3, a_4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & -2 & -4 & -20 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & -4 & -8 & -40 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$ Заключаем, что система векторов (a_1, a_2) является максимальной линейно независимой подсистемой в системе векторов (a_1, a_2, a_3, a_4). Следовательно, базисом подпространства U является система векторов (a_1, a_2) и $\dim U = 2$.

Найдем базис подпространства U сл.8 вторым способом.

Составим из строк a_1, a_2, a_3, a_4 матрицу и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Таким образом, в качестве базиса U можно взять систему векторов $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(0, 1, 2, 3, 4)$.

Определение

Суммой подпространств U_1 и U_2 линейного пространства V над полем F называется множество векторов $\{x_1 + x_2 | x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$, обозначаемое через $U_1 + U_2$.

Предложение

Сумма двух подпространств U_1 и U_2 является подпространством, содержащим как U_1, так и U_2. Если $U_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ и $U_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$, то $U_1 + U_2 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$.

$\Downarrow$ Тот факт, что $U_1 + U_2$ является подпространством, сразу следует из предложения сл.3. Так как $0_V \in U_1 \cap U_2$, для любого $x \in U_1$ имеем $x = x + 0_V \in U_1 + U_2$, откуда следует, что $U_1 \subseteq U_1 + U_2$. Аналогично проверяется, что $U_2 \subseteq U_1 + U_2$. Пусть $U_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ и $U_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$. Тогда $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m \in U_1 + U_2$ и по лемме сл.2 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \subseteq U_1 + U_2$. Пусть $x \in U_1 + U_2$. Тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_j \in U_j$, $j = 1, 2$, т.е. $x_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$, $x_2 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$. Поэтому $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j$, т.е. $x \in \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m \rangle$. Значит, $U_1 + U_2 \subseteq \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m \rangle$ и $U_1 + U_2 = \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m \rangle$. $\Uparrow$

Определение

Суммой конечного семейства подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_m$ линейного пространства V над полем F называется множество векторов $\{x_1 + x_2 + \ldots + x_m | x_j \in U_j, j = 1, 2, \ldots, m\}$, обозначаемое через $U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ или $\sum_{j=1}^{m} U_j$.

По аналогии с предложением сл.10 можно доказать и следующее

Предложение

Сумма подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_m$ является подпространством, содержащим каждое слагаемое U_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Если $U_j = \langle a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jk_j} \rangle$, то $\sum_{j=1}^{m} U_j = \langle a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jk_j} | j = 1, 2, \ldots, m \rangle$.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{m} U_i = (\sum_{j \in J} U_j) + (\sum_{\ell \in L} U_\ell)$ для любых множеств индексов J, L таких что $J \cup L = \{1, \ldots, m\}$.

Определение

Пересечением подпространств U_1 и U_2 линейного пространства V над полем F называется множество $U_1 \cap U_2$ (т.е. пересечение множеств U_1 и U_2).

Из предложения сл.3 сразу получаем, что пересечение подпространств является подпространством. В частности, пересечение любых подпространств содержит нулевой вектор и потому не может быть пустым множеством.
Следующее утверждение вытекает из предложения сл.10.

Наблюдение

Если для подпространств U_1 и U_2 имеет место $U_1 \subseteq U_2$, то $U_1 + U_2 = U_2$ и $U_1 \cap U_2 = U_1$.

Наряду с пересечением двух подпространств можно рассматривать и пересечение любого конечного семейства подпространств. Оно также будет подпространством.

Теорема

Пусть U_1 и U_2 – конечномерные подпространства линейного пространства V над полем F. Тогда $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

$\Downarrow$ Если $U_1 \subseteq U_2$ или $U_2 \subseteq U_1$, то требуемое непосредственно вытекает из наблюдения сл.12. Будем предполагать, что $U_1 \nsubseteq U_2$ и $U_2 \nsubseteq U_1$, т.е. $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ и $U_1 \cap U_2 \subset U_2$. Покажем, что $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. Для этого построим базис в подпространстве $U_1 + U_2$ следующим образом. Выберем базис $(a_1, \ldots, a_k)$ в подпространстве $U_1 \cap U_2$, если это подпространство ненулевое; в противном случае считаем, что $k = 0$. Дополним этот базис до базиса U_1 векторами $b_1, \ldots, b_m$ и до базиса U_2 векторами $c_1, \ldots, c_n$. Тогда $\dim(U_1 \cap U_2) = k$, $\dim U_1 = k + m$ и $\dim U_2 = k + n$, т.е. $\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = k + m + n$. Докажем, что $\dim(U_1 + U_2) = k + m + n$, этим теорема будет доказана.
Убедимся, что система $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$ является базисом в $U_1 + U_2$. Так как $U_1 = \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m \rangle$ и $U_2 = \langle a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_n \rangle$, в силу предложения сл.10 имеем $U_1 + U_2 = \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n \rangle$.

Окончание доказательства теоремы о размерности суммы и пересечения подпространств

Остается доказать линейную независимость системы векторов $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$. Предположим, что для некоторых скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m, \nu_1, \ldots, \nu_n \in F$ имеет место равенство $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k + \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m + \nu_1 c_1 + \ldots + \nu_n c_n = 0_V$. Перенося слагаемые $\nu_1 c_1 + \ldots + \nu_n c_n$ в правую часть, получим равенство

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k + \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m = -\nu_1 c_1 - \ldots - \nu_n c_n. \qquad (1)$$

В последнем равенстве левая часть содержится в подпространстве U_1, а правая – в подпространстве U_2. Следовательно, вектор $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k + \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m$ содержится в $U_1 \cap U_2$. Если $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$, т.е. $k = 0$, то $x = 0_V$ и из равенства $\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_m b_m = 0_V$ получаем $\mu_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, а из равенства $-\nu_1 c_1 - \ldots - \nu_n c_n = 0_V$ – что $\nu_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, и потому система $(b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$ линейно независима.
Пусть $k > 0$. Тогда $x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_k a_k$. Из (1) в силу единственности разложения вектора по базису (в U_1 и U_2) получаем $\lambda_i = \xi_i$, $i = 1, \ldots, k$, $\mu_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$ и $\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, $\nu_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Отсюда $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Линейная независимость системы векторов $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$ доказана.$\Uparrow$

Алгоритм нахождения базисов суммы и пересечения подпространств

Пусть подпространства U_1 и U_2 линейного пространства V над полем F заданы своими базисами $(a_1, \ldots, a_k)$ и $(b_1, \ldots, b_m)$, причем известны столбцы координат всех указанных векторов в некотором базисе пространства V. Чтобы найти базис подпространства $U_1 + U_2$, выделяем максимальную линейно независимую подсистему из системы векторов $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m)$, которая порождает $U_1 + U_2$. Это делается с помощью алгоритма сл.14 §2. Количество векторов, не вошедших с эту систему, равно $k + m - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$. Можно считать, что базис подпространства $U_1 + U_2$ получен путем дополнения векторов из базиса $(a_1, \ldots, a_k)$ подпространства U_1 некоторыми векторами из базиса $(b_1, \ldots, b_m)$ подпространства U_2. Записывая разложение векторов системы $(b_1, \ldots, b_m)$, не вошедших в полученный базис подпространства $U_1 + U_2$, по этому базису, и перенося все слагаемые, содержащие векторы базиса $(a_1, \ldots, a_k)$ в одну часть, а слагаемые, содержащие векторы базиса $(b_1, \ldots, b_m)$ – в другую, мы получим векторы из $U_1 \cap U_2$, которые можно взять в качестве базиса этого подпространства.

Убедимся, что в алгоритме получается действительно базис подпространства $U_1 \cap U_2$. Пусть $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p)$ – базис $U_1 + U_2$ и $b_j = \lambda_{j1}a_1 + \ldots + \lambda_{jk}a_k + \mu_{j1}b_1 + \ldots + \mu_{jp}b_p$ при $j = p+1, \ldots, m$ для некоторых скаляров $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jk}, \mu_{j1}, \ldots, \mu_{jp}$. Перенося $\mu_{j1}b_1 + \ldots + \mu_{jp}b_p$ в левую часть, получаем $b_j - \mu_{j1}b_1 - \ldots - \mu_{jp}b_p = \lambda_{j1}a_1 + \ldots + \lambda_{jk}a_k$. Левая часть этого равенства принадлежит U_2, а правая часть – U_1, поэтому векторы $c_j = b_j - \mu_{j1}b_1 - \ldots - \mu_{jp}b_p$ $(j = p+1, \ldots, m)$ принадлежат $U_1 \cap U_2$. Покажем, что эти векторы образуют линейно независимую систему. Пусть $\gamma_{p+1}c_{p+1} + \ldots + \gamma_m c_m = 0_V$. Подставив вместо c_j их выражения, получим

$\gamma_{p+1}(b_{p+1} - \mu_{p+1,1}b_1 - \ldots - \mu_{p+1,p}b_p) + \ldots + \gamma_m(b_m - \mu_{m1}b_1 - \ldots - \mu_{mp}b_p) = 0_V$, откуда $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_p b_p + \gamma_{p+1}b_{p+1} + \ldots + \gamma_m b_m = 0_V$ (здесь при $j = 1, \ldots, p$ $\alpha_j = -\sum_{i=p+1}^{m} \gamma_i \mu_{ij}$). Так как система $(b_1, \ldots, b_m)$ линейно независима, имеем $\gamma_{p+1} = 0, \ldots, \gamma_m = 0$. Таким образом, система $(c_{p+1}, \ldots, c_m)$ линейно независима. Так как количество векторов в этой системе равно $\dim(U_1 \cap U_2)$, она является базисом подпространства $U_1 \cap U_2$ в силу утверждения 2 теоремы сл.6 §3.

Найти базисы суммы и пересечения подпространств $U_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $U_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, где $a_1 = (1,2,3,4,5)$, $a_2 = (2,3,4,5,6)$, $a_3 = (3,4,5,7,6)$, $b_1 = (2,3,4,3,2)$, $b_2 = (3,4,5,4,3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -9 & -8 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Следовательно, система (a_1, a_2, a_3, b_1) линейно независима и $b_2 = -a_1 + a_2 + b_1$. Таким образом, (a_1, a_2, a_3, b_1) – базис $U_1 + U_2$. Имеем $c = b_2 - b_1 = -a_1 + a_2$, $c \in U_1 \cap U_2$ и $c = (1,1,1,1,1)$ – базис $U_1 \cap U_2$.

Прямая сумма двух подпространств

Определение

Сумма подпространств U_1 и U_2 называется *прямой*, если для любого вектора $x \in U_1 + U_2$ существуют единственные векторы $x_1 \in U_1$ и $x_2 \in U_2$ такие что $x = x_1 + x_2$.

Другими словами, если $x_1, x_1' \in U_1$ и $x_2, x_2' \in U_2$, то из $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ следует $x_1 = x_1'$ и $x_2 = x_2'$.
Тот факт, что сумма подпространств U_1 и U_2 является прямой, обозначается так: $U_1 \oplus U_2$.

Примеры.
1. В пространстве геометрических векторов $V_\pi = V_{\ell_1} \oplus V_{\ell_2}$, где прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, а плоскость π проходит через эти прямые.
2. В пространстве геометрических векторов $V_g = V_\pi \oplus V_\ell$, где π – плоскость, а ℓ – любая прямая, пересекающая плоскость π.
3. Пусть $(a_1, \ldots, a_m)$ — линейно независимая система векторов линейного пространства V. Тогда $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \oplus \langle a_{k+1}, \ldots, a_m \rangle$ для любого $1 < k < m$.

Теорема

Следующие условия для подпространств U_1 и U_2 эквивалентны:

1. $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$;
2. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$;
3. сумма подпространств U_1 и U_2 является прямой.

$\Downarrow$ Из теоремы сл.13 следует, что $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \Leftrightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 0$. Так как для любого подпространства U имеет место $U = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim U = 0$, заключаем, что $1 \Leftrightarrow 2$.

Покажем, что $1 \Rightarrow 3$. Пусть $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in U_1$, $x_2, y_2 \in U_2$. Тогда $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. Так как левая часть этого равенства принадлежит подпространству U_1, а правая часть – подпространству U_2, вектор $z = x_1 - y_1 \in U_1 \cap U_2$, откуда $z = 0_V$ и $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Таким образом, сумма подпространств U_1 и U_2 является прямой.

Покажем, что $3 \Rightarrow 1$. Пусть $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда $z + 0_V = 0_V + z$. Так как сумма подпространств U_1 и U_2 является прямой, имеем $z = 0_V$ и $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$. $\Uparrow$

Прямое дополнение

Теорема

Пусть V – линейное пространство размерности n над полем F и U – его подпространство. Тогда существует такое подпространство $W \subseteq V$, что $V = U \oplus W$.

$\Downarrow$ Если $U = \{0_V\}$, то положим $W = V$. В силу утверждения 1 теоремы сл.19 имеем $V = \{0_V\} \oplus V$. Если $U = V$, то положим $W = \{0_V\}$. Пусть $\{0_V\} \subset U \subset V$. Выберем базис $(a_1, \ldots, a_k)$ в подпространстве U и дополним его векторами $(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ до базиса пространства V. Положим $W = \langle b_{k+1}, \ldots, b_n \rangle$. Из предложения сл.11 следует, что $U + W = \langle a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n \rangle = V$. Так как $\dim V = n$, $\dim U = k$ и $\dim W = n - k$, по теореме сл.19 получаем $V = U \oplus W$. $\Uparrow$

Подпространство W называется *прямым дополнением* подпространства U в линейном пространстве V, если $V = U \oplus W$.

Компонента вектора на подпространство

Пусть линейное пространство $V = U \oplus W$ разлагается в прямую сумму подпространств $U \subset V$ и $W \subset V$. Для вектора $x \in V$ существует единственный вектор $y \in U$ и единственный вектор $z \in W$ такие что $x = y + z$. Тогда вектор y называется *компонентой* вектора x на подпространство U параллельно подпространству W.

Составим базис пространства V из базисов $(a_1, \ldots, a_k)$ подпространства U и $(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ подпространства W. Разложим вектор x по этому базису: $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \lambda_n b_n$. Тогда компонента x на подпространство U параллельно подпространству W есть $y = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$.

Очевидно, что компонента суммы векторов равна сумме компонент и компонента произведения вектора на скаляр равна произведению компоненты вектора на этот скаляр.

Определение

Сумма подпространств $U_1, \ldots, U_m$ линейного пространства V размерности n над полем F называется *прямой*, если для любого вектора $x \in \sum_{i=1}^m U_i$ существуют единственные векторы $x_j \in U_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ такие что $x = x_1 + \ldots + x_m$.

Тот факт, что сумма подпространств $\sum_{i=1}^m U_i$ является прямой, обозначается одним из трех способов: $\sum_{i=1}^{\circ m} U_i$, $\oplus_{i=1}^m U_i$ или $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

Пример. Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ – базис линейного пространства V. Тогда $V = \langle b_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle b_n \rangle$. То, что сумма является прямой, следует из единственности разложения вектора по базису.

Теорема

Следующие условия для подпространств $U_1, \ldots, U_m$ эквивалентны:

1. $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = \{0_V\}$ для $j = 1, \ldots, m$;
2. $\dim(\sum_{i=1}^m U_i) = \sum_{i=1}^m \dim U_i$;
3. сумма подпространств $U_1, \ldots, U_m$ является прямой.

$\Downarrow$ $1 \Rightarrow 2$ Используем индукцию по m. При $m = 2$ требуемое следует из теоремы сл.19. Пусть утверждение доказано для всех $2 \leq k < m$. Так как $U_1 \cap \sum_{i=2}^m U_i = \{0_V\}$, по теореме сл.19 имеем $\dim(U_1 + \sum_{i=2}^m U_i) = \dim U_1 + \dim(\sum_{i=2}^m U_i)$. Так как для всех $j = 2, \ldots, m$ имеет место $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = \{0_V\}$, по предположению индукции имеем $\dim(\sum_{i=2}^m U_i) = \sum_{i=2}^m \dim U_i$. Таким образом, $\dim(\sum_{i=1}^m U_i) = \sum_{i=1}^m \dim U_i$.

$2 \Rightarrow 1$ Из равенства $\dim(\sum_{i=1}^m U_i) = \sum_{i=1}^m \dim U_i$ следует $\dim(\sum_{i \neq j} U_i) = \sum_{i \neq j} \dim U_i$, поскольку согласно предложению сл.11 для любых подпространств имеем $\dim(\sum_{i=1}^p W_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim W_i$. Следовательно, $\dim U_j + \dim \sum_{i \neq j} U_i = \dim(U_j + \sum_{i \neq j} U_i)$, откуда условие 1 вытекает в силу теоремы сл.19.

$1 \Rightarrow 3$ Предположим, что $x = x_1 + \ldots + x_m$ и $x = x'_1 + \ldots + x'_m$ для некоторых $x_j, x'_j \in U_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда из равенства $x_1 + \ldots + x_m = x'_1 + \ldots + x'_m$ получаем $x_j - x'_j = \sum_{i \neq j}(x'_i - x_i)$ для $j = 1, \ldots, m$, откуда $x_j - x'_j \in U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i$ и $x_j - x'_j = 0_V$, т.е. $x_j = x'_j$. Таким образом, условие 3 выполняется.

$3 \Rightarrow 1$ Пусть $x_j \in U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i$, т.е. $x_j = \sum_{i \neq j} x_i$, где $x_i \in U_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда имеет место равенство $\sum_{i=1}^m y_i = \sum_{i=1}^m z_i$, где $y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \neq j; \\ -x_j, & \text{если } i = j. \end{cases}$ и $z_i = 0_V$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Из условия 3 следует, что $y_i = z_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$, т.е. $x_j = 0_V$ и $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = \{0_V\}$.
Теорема полностью доказана. $\Uparrow$

Следствие

Если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$, то $V = (\sum^{\circ}_{i \in I} U_i) \oplus (\sum^{\circ}_{j \in J} U_j)$ для любых множеств индексов I, J таких что $I \cup J = \{1, \ldots, m\}$ и $I \cap J = \emptyset$.

Из условия $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ следует $V = (\sum_{i \in I} U_i) + (\sum_{j \in J} U_j)$ а также $\dim V = \sum_{i=1}^m \dim U_i = \sum_{i \in I} \dim U_i + \sum_{j \in J} \dim U_j$. Из этого с учетом теоремы сл.19 вытекает утверждение следствия.

Понятие прямой суммы подпространств, определенное на сл.22, называют еще *внутренней* прямой суммой. Построим *внешнюю* прямую сумму линейных пространств $V_1, \ldots, V_m$ над полем F. Положим $U = V_1 \times \ldots \times V_m$ – декартово произведение множеств $V_1, \ldots, V_m$ Определим операцию сложения на множестве U. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ – элементы из U $(x_j, y_j \in V_j,\ j = 1, \ldots, m)$. Положим $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$. Определим умножение вектора из U на скаляр: $\lambda \in F$ положим $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)$.

Предложение

Множество U с определенными только что операциями сложения и умножения на скаляр является линейным пространством над полем F.

$\Downarrow$ Проверим справедливость аксиом 1–10 сл.3 §1. Так как сложение векторов и умножение вектора на скаляр для U определены, заключаем, что аксиомы 1 и 6 выполняются. Проверим аксиому 2. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ – элементы из U $(x_j, y_j \in V_j$, $j = 1, \ldots, m)$. Имеем
$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m) = (y_1 + x_1, \ldots, y_m + x_m) = y + x$, т.е. $x + y = y + x$ и аксиома 2 выполняется. Аналогично проверяется аксиома 3.

Так как $(x_1, \ldots, x_m) + (0_{V_1}, \ldots, 0_{V_m}) = (x_1, \ldots, x_m)$, ясно, что $0_U = (0_{V_1}, \ldots, 0_{V_m})$ – нулевой вектор пространства U, поэтому аксиома 4 выполняется. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$ вектор $(-x_1, \ldots, -x_m)$ обладает свойством $x + (-x_1, \ldots, -x_m) = 0_U$, поэтому аксиома 5 также выполняется. Проверим аксиому 7. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ – элементы из U $(x_j, y_j \in V_j,\ j = 1, \ldots, m)$ и $\lambda \in F$. Имеем $\lambda(x + y) = \lambda(x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m) =$
$(\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_m + y_m)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_m + \lambda y_m) =$
$(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m) + (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_m) = \lambda(x_1, \ldots, x_m) + \lambda(y_1, \ldots, y_m) = \lambda x + \lambda y$,
т.е. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, и аксиома 7 выполняется. Аксиомы 8–10 проверяются аналогично. Предложение доказано. $\Uparrow$

Определение

Линейное пространство $U = V_1 \times \ldots \times V_m$ называется *внешней прямой суммой* линейных пространств $V_1, \ldots, V_m$ над полем F.

Обычно внешняя прямая сумма обозначается так же, как внутренняя: $U = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$.

Связь внешней прямой суммы с внутренней

Покажем, что основания для использования обозначения $V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ для внешней прямой суммы имеются. Обозначим через U_j подмножество множества $U = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ вида $\{(0_{V_1}, \ldots, x_j, \ldots, 0_{V_m}) | x_j \in V_j\}$, состоящее из всех кортежей, имеющих на j-месте любой элемент пространства V_j, а на остальных местах – нули соответствующих линейных пространств. Очевидно, что U_j является подпространством линейного пространства U. Легко проверить, что отображение $x_j \mapsto (0_{V_1}, \ldots, x_j, \ldots, 0_{V_m})$ является изоморфизмом линейного пространства V_j на подпространство U_j.
Очевидно также, что $U_j \cap \sum_{i \neq j} U_i = \{0_U\}$ для $j = 1, \ldots, m$. Из теоремы сл.23 вытекает следующее

Предложение

Линейное пространство U является внутренней прямой суммой подпространств $U_1, \ldots, U_m$.