Глава I. Линейные пространства
§ 1. Понятие линейного пространства. Линейные комбинации и линейные оболочки

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Краткое описание курса линейной алгебры

Курс линейной алгебры продолжает курс основ алгебры 1-го семестра и изучается в течение 2-го семестра. Основным объектом изучения являются конечномерные линейные (или векторные) пространства и их линейные отображения, а также линейные пространства со скалярным произведением. Рассматриваются и приложения линейной алгебры – ранг матрицы, общая теория систем линейных алгебраических уравнений, билинейные и квадратичные формы. Кроме того, уделено внимание приложениям линейной алгебры к некоторым экономическим задачам.

Ссылки на курс "Основы алгебры"даются следующим образом: сл.m §k гл.n ОА. Ссылки на темы внутри курса даются указанием слайда, номера внутри одной главы и номера главы, как в курсе ОА.

Список литературы.

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1980 (2-е изд.).
2. Кострикин А.И. Линейная алгебра. Любое издание.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Любое издание.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. Любое издание.
5. Замятин А.П., Булатов А.А., Верников Б.М. Алгебра и геометрия. Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 2001.
6.Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса. Изд-во УрГУ, Екатеринбург, 2010 (2-е изд.).

Пусть V – непустое множество, F – поле. Элементы из V будем обозначать малыми латинскими буквами и называть *векторами*, элементы из F будем обозначать малыми греческими буквами и называть *скалярами*.

Определение

V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством над полем* F, если выполняются следующие условия.

1. На V определена операция сложения, относительно которой $(V,+)$ является абелевой группой (см. сл.2 §6 гл.I ОА).
2. Определено отображение $F \times V \longrightarrow V$, образ пары (α, x) обозначаем через αx и называем *произведением* вектора x на скаляр α, и для любых $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in F$ выполняются равенства:
   $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;
   $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;
   $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
   $1x = x$ (1 – единица поля F).

Нуль абелевой группы $(V,+)$ называется *нуль-вектором* и обозначается через 0_V.

Другая формулировка определения линейного пространства

Аксиомы линейного пространства

Непустое множество V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством над полем* F, если выполняются следующие условия:

1. $\forall x, y \in V \ \ \exists! z \in V$ (вектор z называется *суммой векторов* x и y и обозначается через $x + y$)
2. $\forall x, y \in V \ \ x + y = y + x$
3. $\forall x, y, z \in V \ \ (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\exists 0 \in V \ \ \forall x \in V \ \ x + 0 = x$
5. $\forall x \in V \ \ \exists y \in V \ \ x + y = 0$
6. $\forall \alpha \in F \ \ \forall x \in V \ \ \exists! y \in V$ (вектор y называется *произведением вектора* x и скаляра α и обозначается через αx)
7. $\forall \alpha \in F \ \ \forall x, y \in V \ \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. $\forall \alpha, \beta \in F \ \ \forall x \in V \ \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
9. $\forall \alpha, \beta \in F \ \ \forall x \in V \ \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
10. $\forall x \in V \ \ 1x = x$

Вектор 0 из аксиомы 4 определен однозначно и вектор y из аксиомы 5 однозначно определяется по вектору x.

Пространства геометрических векторов

1. Множества всех геометрических векторов V_g, а также $V_\ell = \{\vec{x} \in V_g | \vec{x} \parallel \ell\}$ (ℓ – любая прямая) и $V_\pi = \{\vec{x} \in V_g | \vec{x} \parallel \pi\}$ (π – любая плоскость) являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

Это следует из свойств линейных операций над геометрическими векторами, известных из аналитической геометрии.
Данные примеры позволяют наглядно представить себе линейное пространство.

Пространства матриц

2. Множества $F^{k\times n}$ всех матриц фиксированных размеров $k \times n$ ($k, n \in \mathbb{N}$) с элементами из поля F являются линейными пространствами над полем F.

Это следует из свойств линейных операций над матрицами.
Обозначим пространство строк $F^{1\times n}$ через F^n. Оно называется *арифметическим пространством* над полем F.
Пространство столбцов $F^{k\times 1}$ будем обозначать через F_k.

Примеры линейных пространств 3-5

Пространства многочленов

3. Множество всех многочленов $F[x]$ над полем F и множества $VP_n(F)$ всех многочленов степени, не превосходящей n, (включая нулевой многочлен) являются линейными пространствами над полем F.

Это непосредственно следует из свойств операций над многочленами (сл.4-5 §1 гл.IV ОА).

Пространства функций

4. Пусть X – непустое множество, F – поле. Множество $\mathcal{F}(X, F)$ всех функций из множества X в поле F является линейным пространством над полем F относительно указанных ниже операций.

Пусть $V = \mathcal{F}(X, F)$. Для $f, g \in V$ положим $h = f + g$, где $h(x) = f(x) + g(x)$ для любого $x \in X$, и для $\alpha \in F$, $f \in V$ положим $g = \alpha f$, где $g(x) = \alpha f(x)$ для любого $x \in X$.

Поле комплексных чисел

5. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ относительно обычных операций является линейным пространством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Доказательство того, что пространство функций – линейное пространство

$\Downarrow$Проверим аксиомы 1–10 сл.4, сохраняя обозначение $V = \mathcal{F}(X, F)$. Аксиомы 1 и 6 обеспечиваются определениями сложения функций и умножения функции на скаляр. Пусть $f, g \in V$, $x \in X$. Так как $f(x), g(x) \in F$, имеем $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$, откуда следует $f + g = g + f$, т.е. аксиома 2 выполняется. Аналогично проверяется аксиома 3. Положим $o(x) = 0$ для любого $x \in X$. Тогда функция o обладает свойством $f + o = f$ для любого $f \in V$, т.е. аксиома 4 выполняется. Для функции $f \in V$ и любого $x \in X$ положим $g(x) = -f(x)$. Тогда $f + g = o$, и аксиома 5 выполняется.
Пусть $\alpha \in F$, $f, g \in V$, $x \in X$. Тогда $(\alpha(f+g))(x) = \alpha((f+g)(x)) =$ $= \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$, т.е. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ и аксиома 7 выполняется. Аналогично проверяется аксиома 8. Для проверки аксиомы 9 возьмем $\alpha, \beta \in F$, $f \in V$, и $x \in X$. Имеем $(\alpha(\beta f))(x) = \alpha((\beta f)(x)) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta) f(x) = ((\alpha\beta) f)(x)$, откуда следует $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$. Аксиома 9 выполняется. Аксиома 10 выполняется очевидным образом.$\Uparrow$

Предложение

1. *Для любых* $\gamma \in F$, $a \in V$ *справедливы равенства* $\gamma 0_V = 0_V$, $0a = 0_V$.
2. *Для любых* $a \in V$, $\gamma \in F$ *справедливы равенства* $(-1)a = -a$, $\gamma(-a) = -\gamma a$, $(-\gamma)a = -\gamma a$.
3. *Для любых* $\gamma \in F$, $a \in V$ *из* $\gamma \neq 0$, $a \neq 0_V$ *следует* $\gamma a \neq 0_V$.
4. *Для любых* $a, b \in V$, $\gamma, \delta \in F$ *справедливы равенства* $\gamma(a - b) = \gamma a - \gamma b$ *и* $(\gamma - \delta)x = \gamma x - \delta x$.

$\Downarrow$ Докажем первое из равенств 1. Умножив обе части равенства $0_V + 0_V = 0_V$ на скаляр γ, получим $\gamma(0_V + 0_V) = \gamma 0_V$, откуда $\gamma 0_V + \gamma 0_V = \gamma 0_V + 0_V$ и $\gamma 0_V = 0_V$. Второе равенство доказывается аналогично. Для доказательства первого из равенств 2 запишем $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0_V$, откуда $a + (-1)a = 0_V$ и $(-1)a = -a$. Второе и третье равенства проверяются аналогично.
Пусть $\gamma \in F$, $a \in V$ и $\gamma \neq 0$, но $\gamma a = 0_V$. Так как $\gamma \neq 0$, существует γ^{-1}. Умножим обе части равенства $\gamma a = 0_V$ на γ^{-1}: $\gamma^{-1}(\gamma a) = \gamma^{-1} 0_V$. Отсюда $(\gamma^{-1}\gamma)a = 0_V$ и $1a = 0_V$, т.е. $a = 0_V$. Утверждение 3 доказано.
Для доказательства первого равенства утверждения 4 вспомним, что $a - b = a + (-b)$. Имеем $\gamma(a - b) = \gamma(a + (-b)) = \gamma a + \gamma(-b) = = \gamma a + (-\gamma b) = \gamma a - \gamma b$. Второе равенство доказывается аналогично. $\Uparrow$

Пусть V – линейное пространство над полем F. Конечная последовательность векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ из V называется *системой векторов*. В системе векторов существен порядок векторов и на разных местах в системе может находиться один и тот же вектор.

Определение

Линейной комбинацией системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ с коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$ называется вектор $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k$.

Если равенство $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k$ выполняется для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$, то будем говорить, что вектор b *линейно выражается* через систему векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и обозначать этот факт через $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$. Если каждый вектор системы $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно выражается через систему векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то будем писать $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и говорить, что система $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то будем говорить, что системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно эквивалентны* и писать $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash\dashv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

По правилу умножения строки на столбец имеем

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix}.$$

Если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то для некоторых $\gamma_{ij} \in F$ имеем

$b_1 = \gamma_{11} a_1 + \gamma_{21} a_2 + \ldots + \gamma_{k1} a_k;$

$b_2 = \gamma_{12} a_1 + \gamma_{22} a_2 + \ldots + \gamma_{k2} a_k;$

....

$b_m = \gamma_{1m} a_1 + \gamma_{2m} a_2 + \ldots + \gamma_{km} a_k.$

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{km} \end{pmatrix}.$

Тогда приведенную выше систему равенств можно записать в матричном виде: $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma$, где $\Gamma \in F^{k \times m}$.

Транзитивность отношения "линейно выражается"

Предложение

Если система векторов $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *линейно выражается через систему* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, *а система* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, *то система* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

$\Downarrow$ Если система векторов $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ линейно выражается через систему $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то имеем $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot \Delta$ для некоторой матрицы $\Delta \in F^{m \times n}$. Если система векторов $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma$ для некоторой матрицы $\Gamma \in F^{k \times m}$. Следовательно, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot \Delta =$ $= ((a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma) \cdot \Delta = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot (\Gamma \cdot \Delta)$. Последнее равенство в этой цепочке доказывается так же, как ассоциативность умножения матриц (сл.13-14 §2 гл.II ОА). $\Uparrow$

Таким образом, если A, B, C – системы векторов и $B = A \cdot \Gamma$, $C = B \cdot \Delta$ для некоторых матриц Γ, Δ, то $C = A \cdot (\Gamma \cdot \Delta)$.

Линейные оболочки

Определение

Линейной оболочкой системы векторов называется множество всевозможных линейных комбинаций этой системы.

Для системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ее линейная оболочка обозначается через $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ или $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. По определению $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k | \gamma_j \in F,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$.
Линейная оболочка одного вектора: $\langle a \rangle = \{\gamma a | \gamma \in F\}$.

Предложение

Если $a \neq 0_V$, то отображение $\gamma \mapsto \gamma a$ является биекцией множества F на $\langle a \rangle$.

$\Downarrow$ Очевидно, что указанное отображение сюръективно. Проверим его инъективность. Пусть $\gamma a = \delta a$ для некоторых $\gamma, \delta \in F$. Тогда $\gamma a - \delta a = 0_V$, откуда $(\gamma - \delta) a = 0_V$. Так как $a \neq 0_V$, из утверждения 3 предложения сл.7 следует $\gamma - \delta = 0$ и $\gamma = \delta$. $\Uparrow$

Следствие

Если поле F бесконечно, то линейная оболочка любой системы векторов, содержащей ненулевой вектор, также является бесконечным множеством.

Предложение

1. $\langle\vec{0}\rangle = \{\vec{0}\}$.
2. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\langle\vec{a}\rangle = V_\ell$, где ℓ – любая прямая, коллинеарная вектору $\vec{a}$.
3. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = V_\pi$, где π – любая плоскость, компланарная векторам $\vec{a}, \vec{b}$.
4. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – тройка некомпланарных векторов, то $\langle\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle = V_g$.

Упражнение: провести доказательство самостоятельно.

Свойства линейных оболочек

Предложение

1. *Для любых векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *справедливы включения* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
2. *Для любых векторов* $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ *справедливо включение* $\langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
3. *Для любых систем векторов* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *справедливо утверждение* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \iff (b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
4. *Для любых систем векторов* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *справедливо утверждение* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \iff (a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash\dashv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.
5. *Для любой системы векторов* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *и любого вектора* b *справедливо утверждение* $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b \iff \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle$.

Доказательство предложения слайда 14

$\Downarrow$ Утверждение 1 очевидно: $a_j = 0a_1 + \ldots + 1a_j + \ldots + 0a_k$.
Утверждение 2 вытекает из предложения сл.11: для любого $c \in \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$ имеем $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash c$, а из $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ следует $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, поэтому $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash c$ и следовательно $c \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
Утверждение 3 следует из соответствующих определений и утверждения 2.
Утверждение 4 непосредственно следует из утверждения 3.
В утверждении 5 импликация $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle \Longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$ очевидна. Из $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$ следует $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k, b)$ и в силу утверждения 2 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$. Обратное включение выполняется очевидным образом. $\Uparrow$

По аналогии с элементарными преобразованиями строк матрицы определим элементарные преобразования системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейного пространства V:

1. Перестановка векторов.
2. Умножение одного вектора на ненулевой скаляр.
3. Прибавление к одному вектору другого, умноженного на скаляр.

Предложение

Если одна система векторов получается из другой с помощью конечной последовательности элементарных преобразований, то линейные оболочки этих систем совпадают.

$\Downarrow$Очевидно, что одно элементарное преобразование системы векторов дает систему, которая линейно выражается через исходную систему. Также очевидно, что каждое элементарное преобразование системы векторов обратимо. Следовательно, для одного элементарного преобразования получается система векторов, линейно эквивалентная исходной. Согласно утверждению 4 предложения сл.14 утверждение предложения справедливо для одного элементарного преобразования и потому оно выполняется для любой конечной последовательности таких преобразований.$\Uparrow$

Пусть F – поле. Через $F^{\mathbb{N}}$ обозначим множество всех последовательностей $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ с элементами из поля F. Последовательность можно рассматривать как функцию из множества натуральных чисел в поле F, поэтому $F^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, F)$ и это множество является линейным пространством относительно поэлементного сложения и умножения на скаляр последовательностей (см. пример 4 на сл.6).

Упражнение

Убедиться, что следующие множества последовательностей действительных чисел являются линейными пространствами:

1. множество всех сходящихся последовательностей;
2. множество всех ограниченных последовательностей;
3. множество всех бесконечно малых последовательностей.

Для облегчения соответствующей проверки можно воспользоваться предложением сл.3 т.4. Подмножество линейного пространства само будет линейным пространством относительно тех же операций, если оно не пусто и замкнуто относительно сложения и умножения на скаляр.

Определение

Рекуррентным соотношением называется равенство вида

$$x_{m+k} = \lambda_m x_{m+k-1} + \lambda_{m-1} x_{m+k-2} + \ldots + \lambda_2 x_{k+1} + \lambda_1 x_k, \tag{1}$$

где λ_j – элементы поля F $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Решением рекуррентного соотношения (1) называется последовательность $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in F^{\mathbb{N}}$ такая что для любого натурального k справедливо равенство $\xi_{m+k} = \lambda_m \xi_{m+k-1} + \lambda_{m-1} \xi_{m+k-2} + \ldots + \lambda_2 \xi_{k+1} + \lambda_1 \xi_k$. Решения рекуррентных соотношений называются *рекуррентными последовательностями*. Любое решение рекуррентного соотношения (1) однозначно определяется своими первыми m членами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

Предложение

Множество всех решений рекуррентного соотношения (1) является линейным пространством относительно поэлементного сложения и умножения на скаляр последовательностей.

Упражнение: провести доказательство самостоятельно.

Для задания конкретного решения рекуррентного соотношения (1) сл.18 достаточно указать *начальные условия* – конкретные значения первых m элементов последовательности. Последующие ее элементы однозначно определяются из соотношения (1).

Определение

Решение рекуррентного соотношения $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ с начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ называется *последовательностью Фибоначчи*, а ее элементы – *числами Фибоначчи*.

Первые несколько членов последовательности Фибоначчи:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots.$

Существует способ решения рекуррентных соотношений, позволяющий указывать явный вид n-го члена последовательности как функции от n (см. сл.19-21 §3).