

Каноническое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z); \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0);$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, k_1); \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, k_2);$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

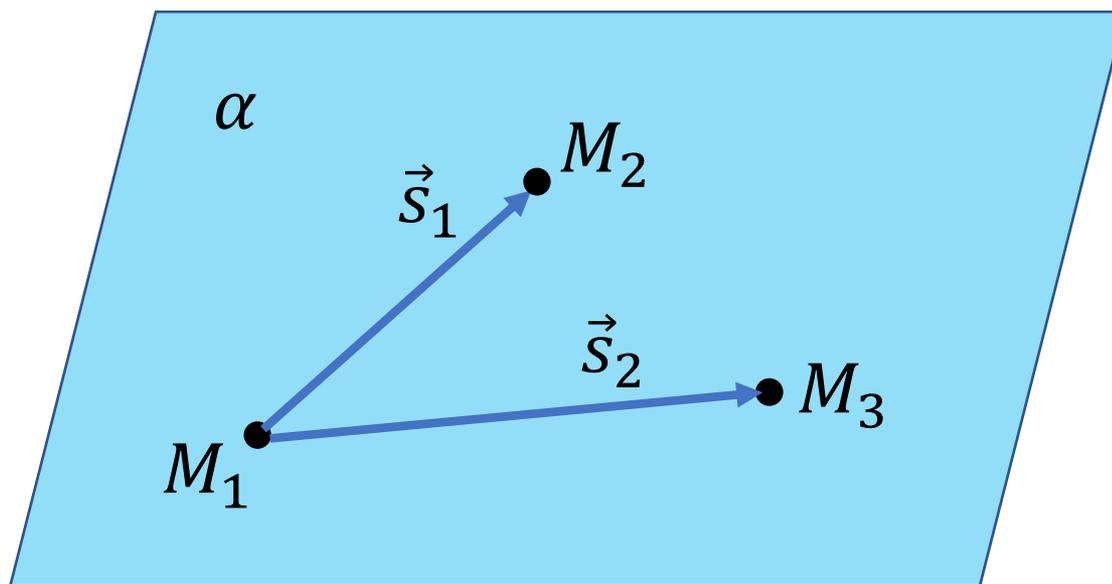
Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три фиксированные точки на плоскости α , не лежащие на одной прямой.

$$\text{Пусть } \vec{s}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

\vec{s}_1 и \vec{s}_2 не коллинеарны. Тогда из канонического уравнения плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пример 1. $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, 1, -1)$.
Найти уравнение плоскости ABC .

Решение.

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB} = (0 - (-1), 1 - 2, (-1) - 3) = (1, -1, -4)$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{AC} = (2 - (-1), 1 - 2, (-1) - 3) = (3, -1, -4)$$

$$\begin{vmatrix} x - (-1) & y - 2 & z - 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$(x + 2) \cdot 0 - (y - 2) \cdot 8 + (z - 3) \cdot 2 = 0$$

$$-8y + 16 + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-8y + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4y - z - 5 = 0$$

Общее уравнение плоскости с данными нормальным вектором и точкой на ней

Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$ –

нормальный вектор плоскости α , т.е.

ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости α

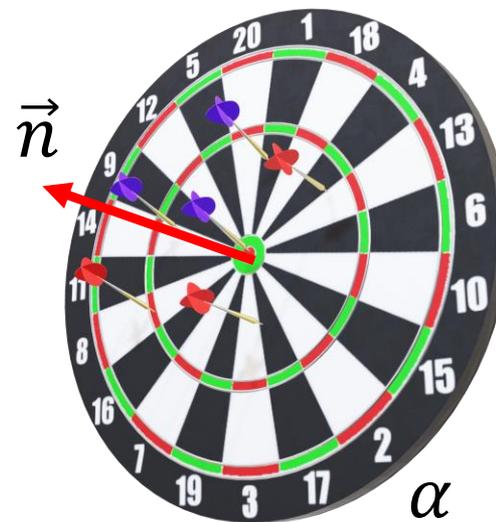
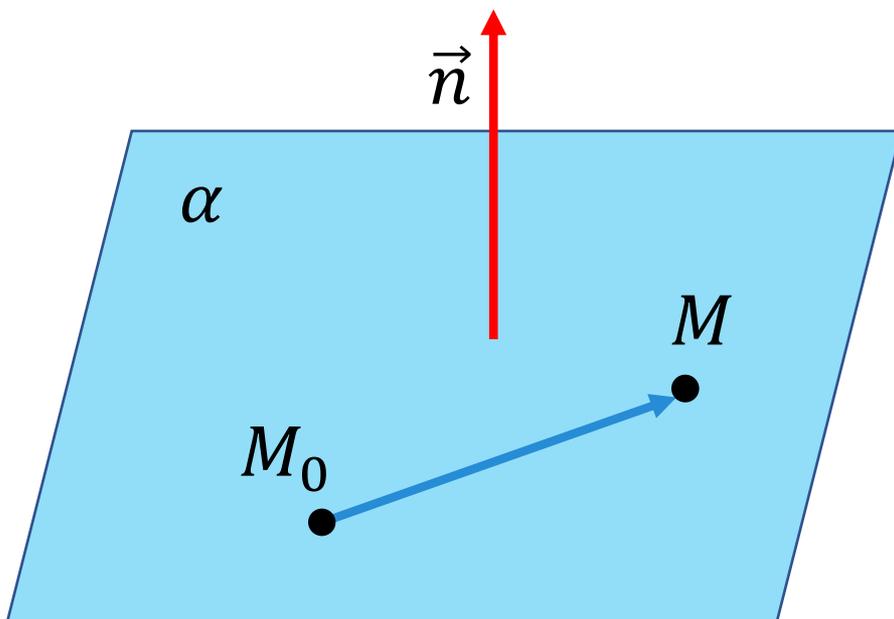
$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- уравнение плоскости, с нормальным вектором \vec{n} и точкой M_0 на плоскости

Общее уравнение плоскости с данными нормальным вектором и точкой на ней



Общее уравнение плоскости

$$\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

⇓

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

⇓

$$Ax + By + Cz - \underbrace{Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{D} = 0$$

⇓

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Общее уравнение плоскости

$$\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

\Downarrow

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

\Downarrow

$$Ax + By + Cz - \underbrace{Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{D} = 0$$

\Downarrow

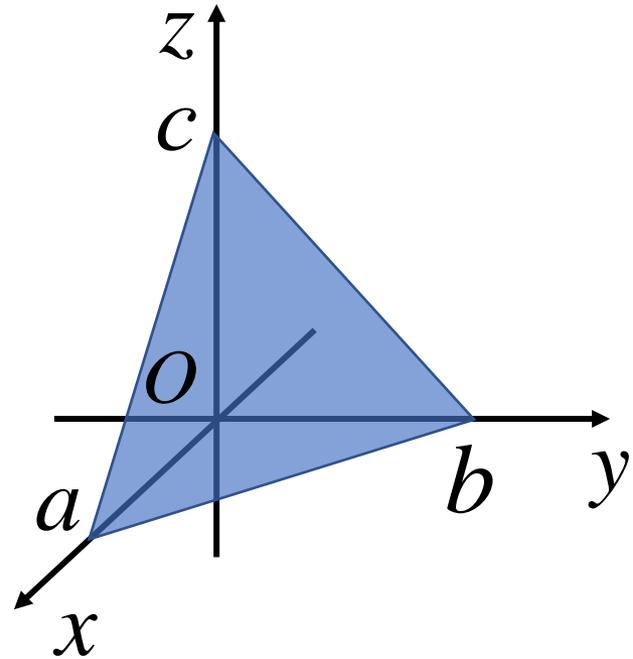
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

общее уравнение плоскости
с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$

Уравнение плоскости «в отрезках»

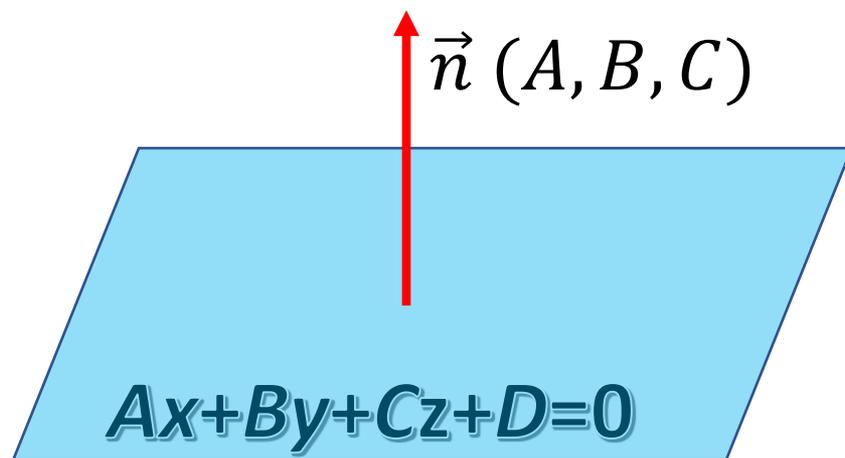
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

a, b, c – **отрезки**,
отсекаемые плоскостью
на координатных осях



Теорема об общем уравнении плоскости

Теорема. Любая плоскость задается общим уравнением, и наоборот, любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задает плоскость (если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). (Без док-ва).



Уравнение плоскости «в отрезках»

Пример 2. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,2,3)$, перпендикулярно к вектору $\vec{n} = (2, -2, 3)$. Составить уравнение этой плоскости «в отрезках».

Решение.

$$2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x - 2 - 2y + 4 + 3z - 9 = 0$$

$2x - 2y + 3z - 7 = 0$ - общее уравнение

ПЛОСКОСТИ

Уравнение плоскости «в отрезках»

$$2x - 2y + 3z - 7 = 0$$

$$2x - 2y + 3z = 7 \quad (:7)$$

$$\frac{2}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z = 1$$

$$\frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{-\frac{7}{2}} + \frac{z}{\frac{7}{3}} = 1 \quad \text{- уравнение плоскости «в отрезках»}$$

Взаимное расположение двух плоскостей

$$\alpha_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\alpha_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

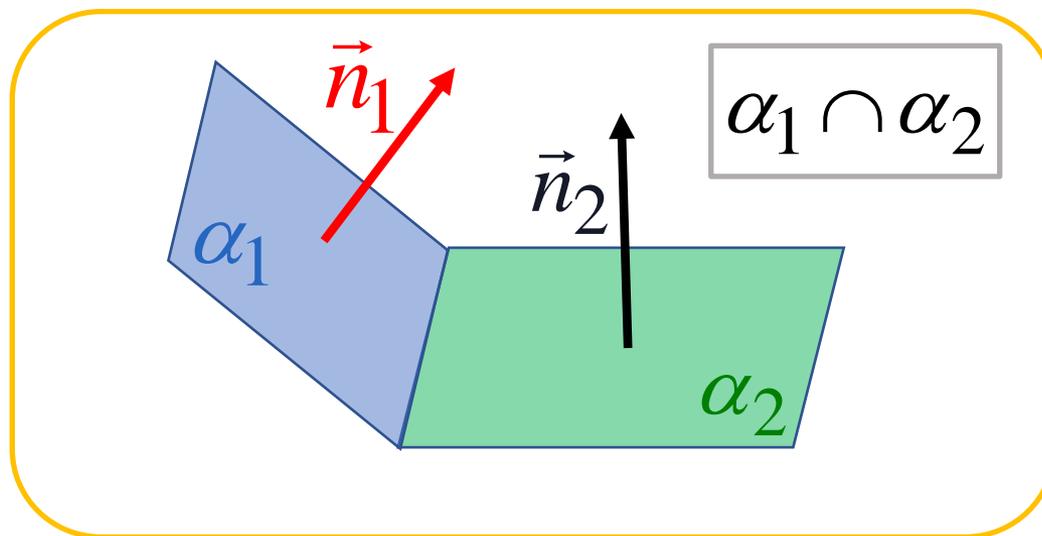
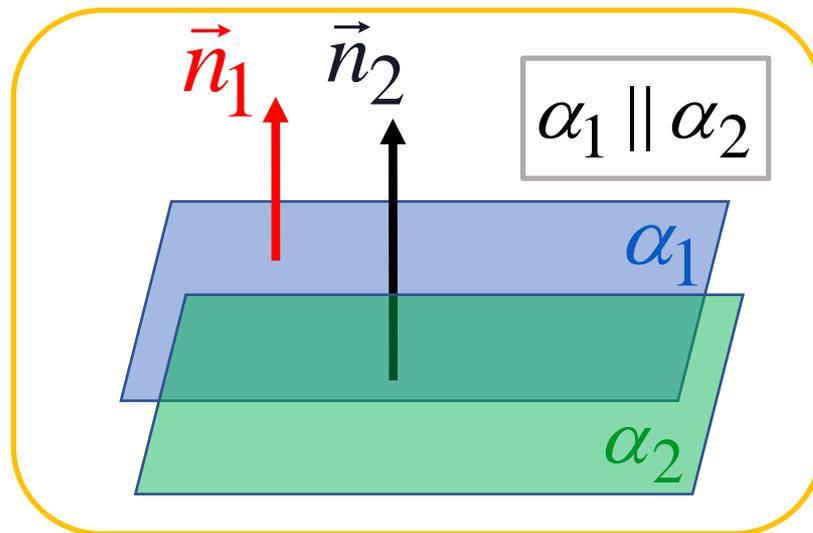
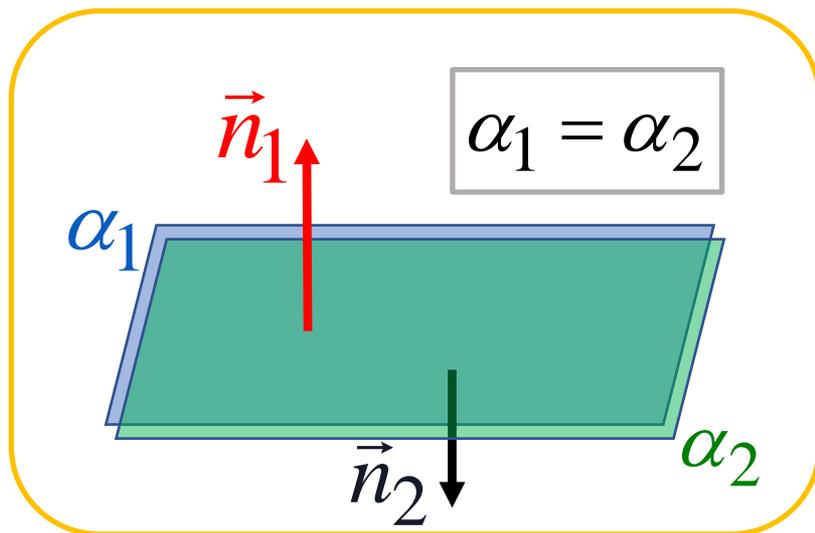
$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

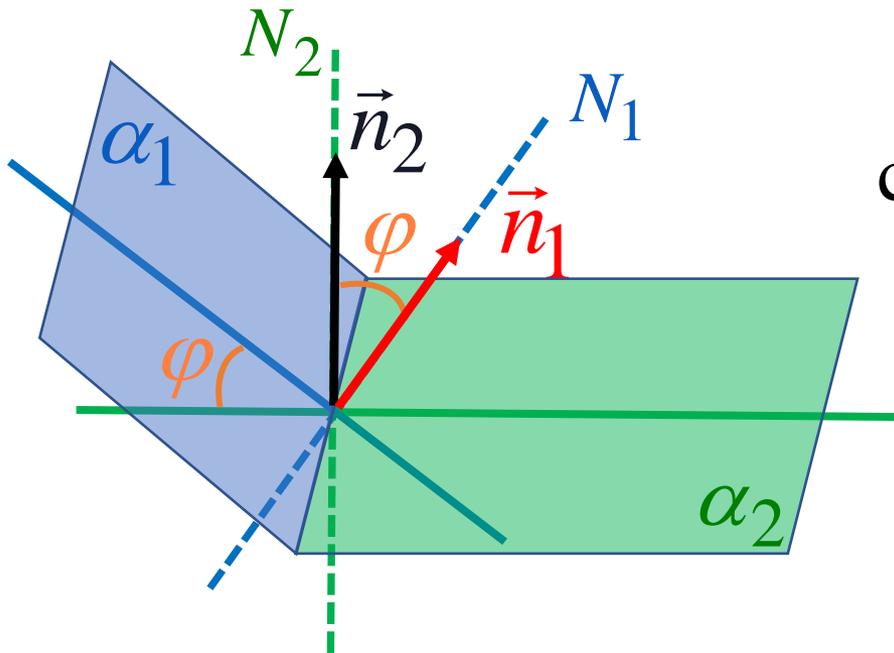
$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2 \text{ пересекаются} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Взаимное расположение двух плоскостей



Угол между двумя плоскостями

Утв. Острый угол φ между плоскостями α_1 и α_2 равен острому углу между нормальными N_1 и N_2 к этим плоскостям.



$$\cos \varphi = \cos(\alpha_1 \alpha_2)$$

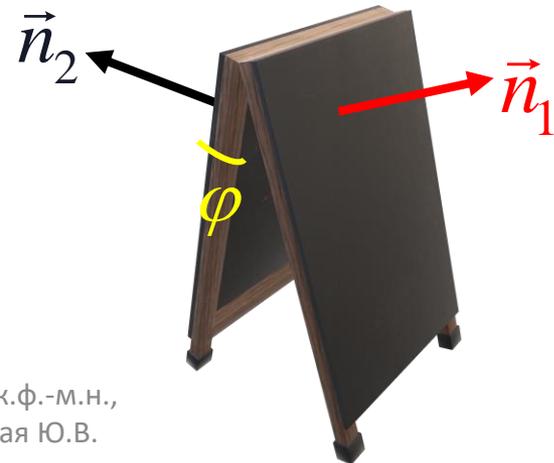
$$\cos(\alpha_1 \alpha_2) = \cos(N_1 N_2)$$

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2) \right|$$

Угол между двумя плоскостями

$$\cos \varphi = \cos(\alpha_1 \alpha_2) = \left| \cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2) \right|$$

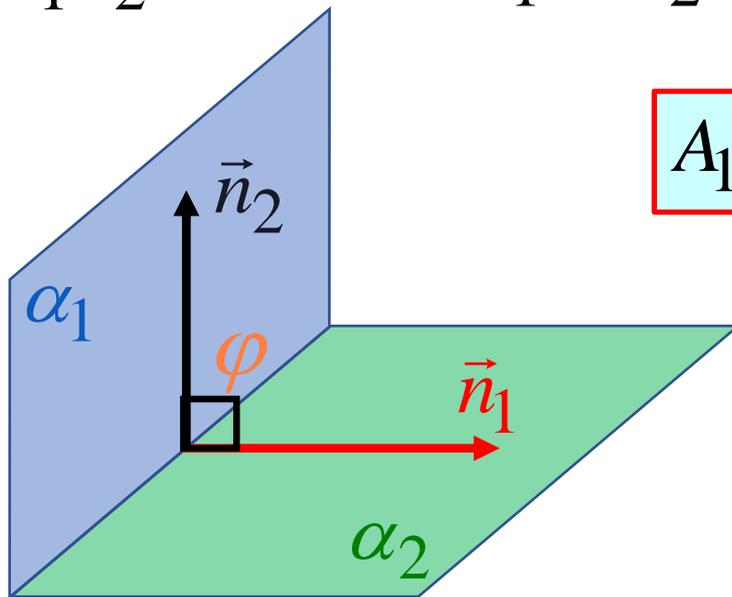
$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



Условие взаимной перпендикулярности двух плоскостей

Следствие. Плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\varphi = \alpha_1\alpha_2 = 90^0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow$$



$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Угол между двумя плоскостями

Пример 3. Доказать, что плоскости $z + 3 = 0$, $2x - y - 4z - 4 = 0$ пересекаются и найти острый угол между ними.

Решение.

$$\alpha_1: z + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 3 = 0$$

$$\alpha_2: 2x - y - 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot x + (-1) \cdot y + (-4) \cdot z - 4 = 0$$

$$\frac{0}{2} = \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{-4} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{плоскости } \alpha_1 \text{ и } \alpha_2 \\ \text{пересекаются} \end{array}$$

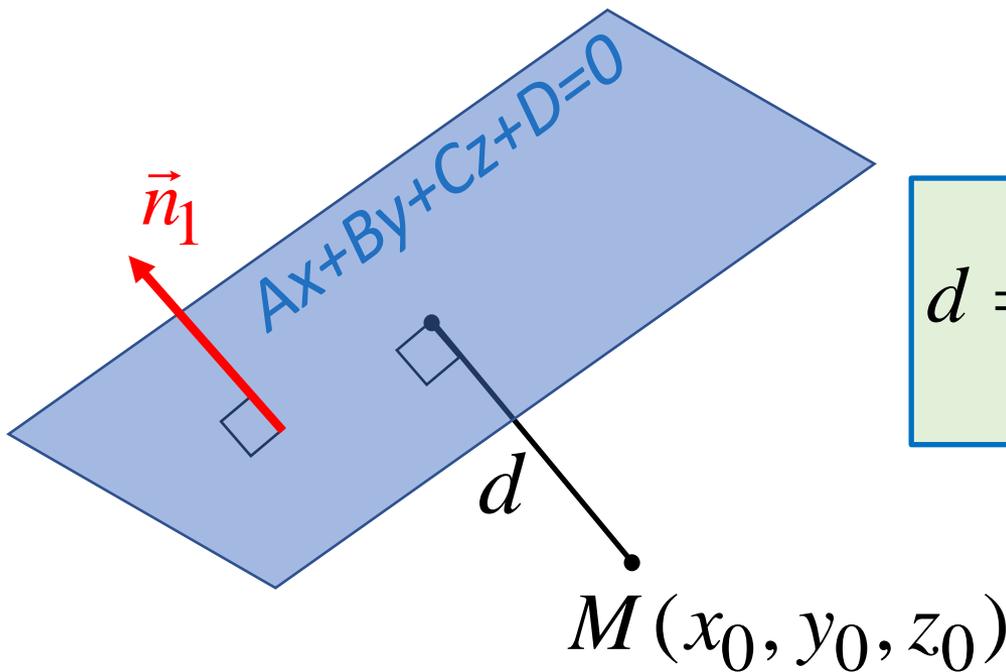
Угол между двумя плоскостями

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \\ &= \frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2}} = \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}\end{aligned}$$

- острый угол между плоскостями
 α_1 и α_2

Расстояние от точки до плоскости

Опр. **Расстоянием** d от точки M до плоскости называется наименьшее расстояние от M до точек плоскости.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

Пример 4. Найти расстояние от точки $M(4,3,1)$ до плоскости $3x - 4y + 12z + 14 = 0$.

Решение.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = 2$$

