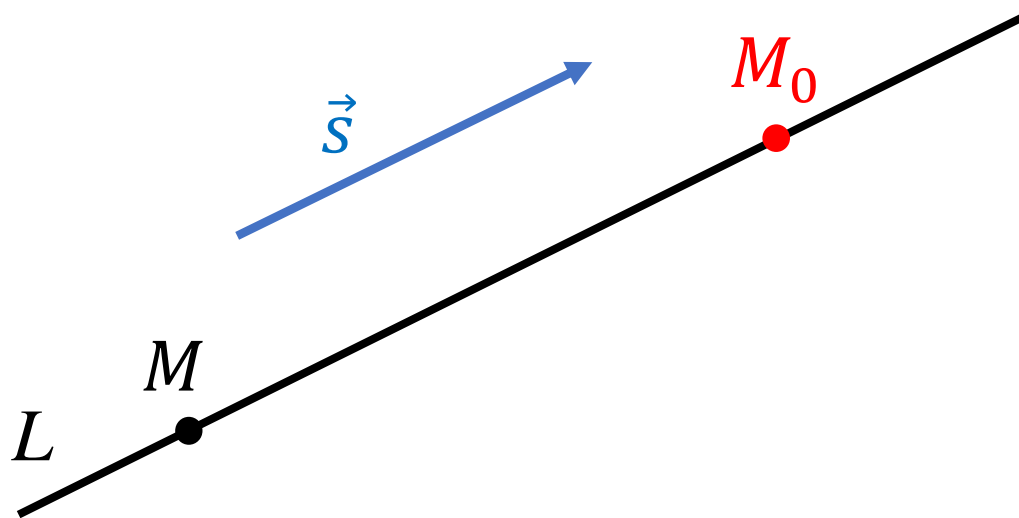


Уравнения прямой на плоскости



Параметрическое уравнение прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot \ell \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой на плоскости

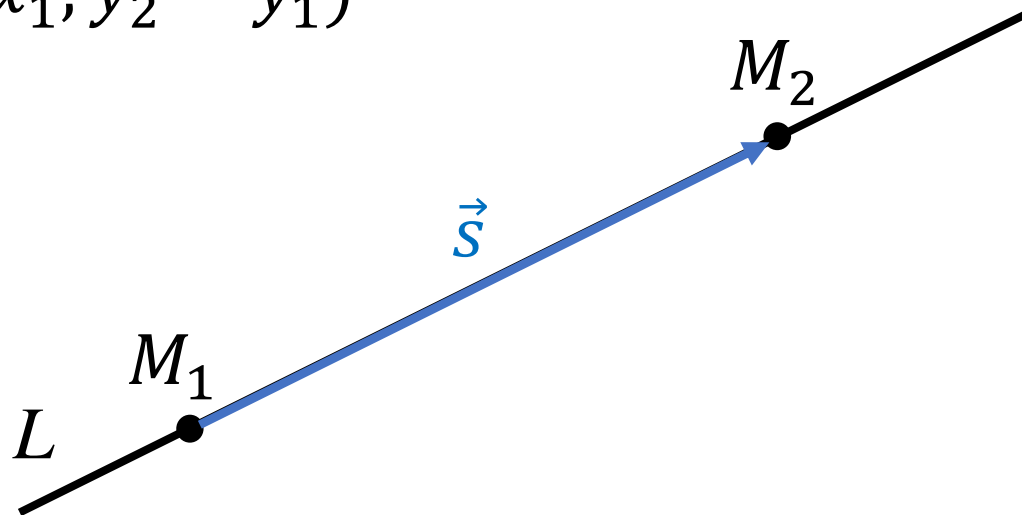
$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m}$$

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – две несовпадающие фиксированные точки на прямой.

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

Пример 1. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой AB , если $A(-1,4)$, $B(2,3)$.

По формуле $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$$AB: \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{y - 4}{3 - 4}$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 3t \\ y - 4 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$$

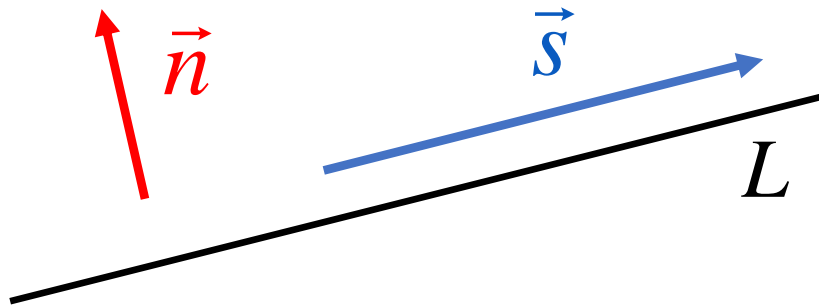
каноническое
уравнение

параметрическое
уравнение

Общее уравнение прямой на плоскости

$Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой

Замечание. $\vec{n} = (A, B)$ - **нормальный** вектор прямой L , т.е. ненулевой вектор, перпендикулярный прямой

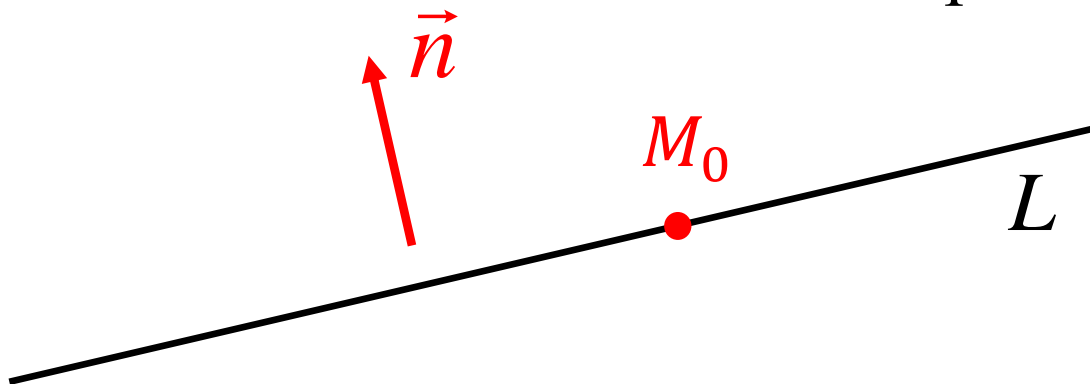


Общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором

Пусть $\vec{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой L

$M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой L

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой,
проходящ. через точку M_0
с норм. вектором \vec{n}



Общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором

Пример 2. Написать общее уравнение а) прямой L_1 , перпендикулярной к прямой $L: 2x - 3y + 1 = 0$, проходящей через точку $P(-1, 1)$, и б) прямой L_2 , параллельной прямой L , проходящей через эту точку.

Решение (I способ). Нормальный вектор $\vec{n} = (2, -3)$ прямой L является направляющим вектором \vec{s}_1 прямой $L_1 \Rightarrow$

[по формуле $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$]

$$L_1: \frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow$$



Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

$$-3(x + 1) = 2(y - 1) \Rightarrow -3x - 3 = 2y - 2 \Rightarrow$$

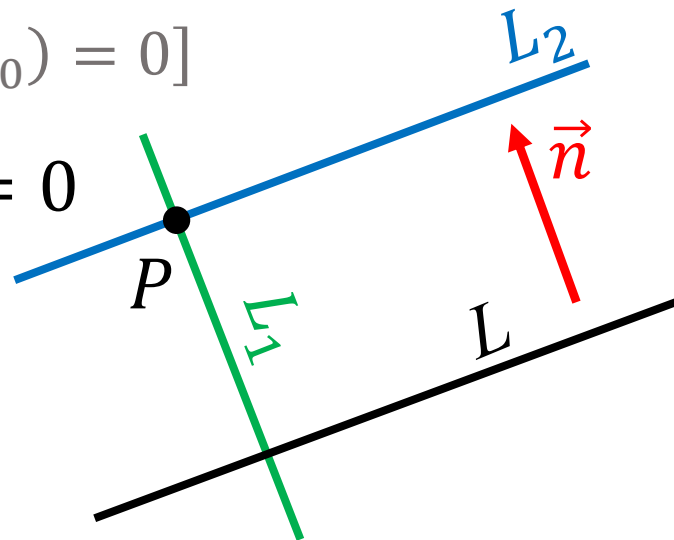
$$L_1: 3x + 2y + 1 = 0$$

Нормальный вектор $\vec{n} = (2, -3)$ прямой L является нормальным вектором \vec{s}_2 прямой $L_2 \Rightarrow$

[по формуле $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$]

$$L_2: 2(x - (-1)) - 3(y - 1) = 0$$

$$L_2: 2x - 3y + 5 = 0$$



Уравнение прямой «в отрезках»

Выводится из общего уравнения прямой:

Пусть $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

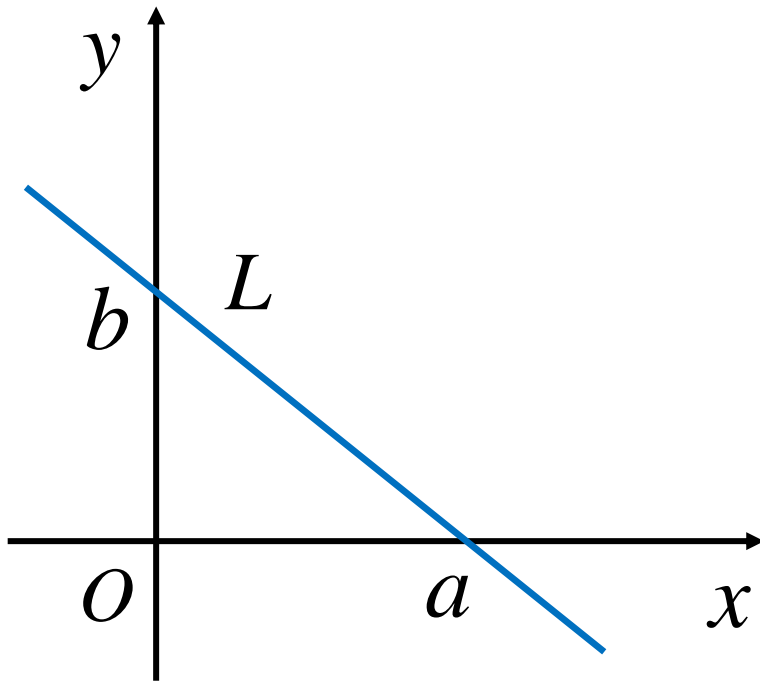
$$Ax + By = -C \Rightarrow \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{x}{-C}}{\frac{-C}{A}} + \frac{\frac{y}{-C}}{\frac{-C}{B}} = 1 \quad \text{Пусть} \quad \frac{-C}{A} = a; \quad \frac{-C}{B} = b.$$

Тогда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Уравнение прямой «в отрезках»



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Пересечение с Ox :

$$y = 0 \Rightarrow x = a$$

Пересечение с Oy :

$$x = 0 \Rightarrow y = b$$

a, b – **отрезки**, отсекаемые прямой на координатных осях

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Выводится из общего уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0:$$

Пусть $B \neq 0$.

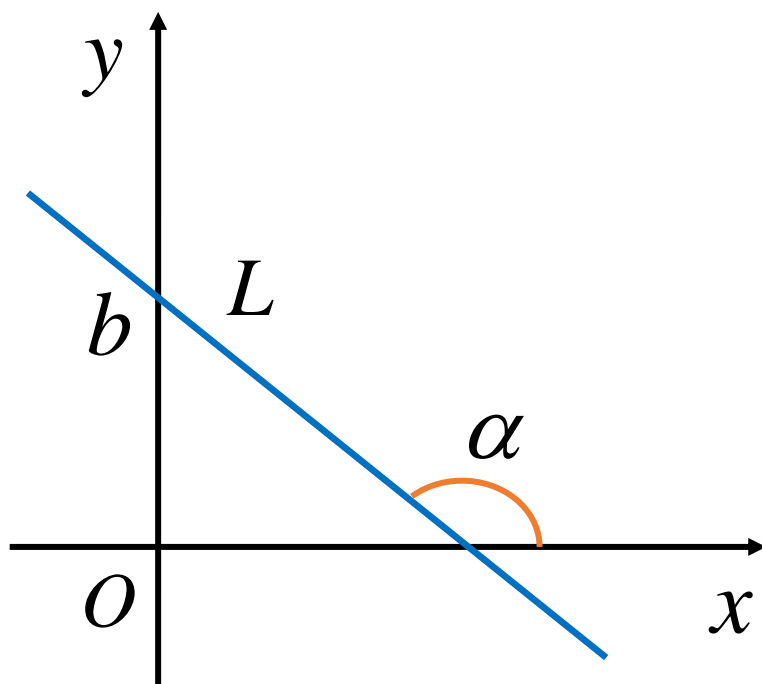
$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-A}{B}x + \frac{-C}{B}$$

Обозначим через $\frac{-A}{B} = k$; $\frac{-C}{B} = b$. Тогда

$$y = kx + b$$

– уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Замечание:

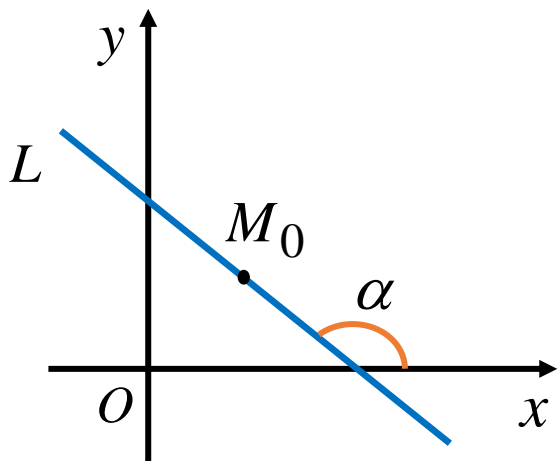
1) точка пересечения прямой с Oy : $x = 0$, $y = b$;

2) $k = \operatorname{tg} \alpha$: угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Пусть k - угловой коэффициент прямой L

$M_0(x_0, y_0)$ - точка на прямой L



$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

- уравнение прямой L , с угловым коэффициентом k , проходящей через точку M_0

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Пример 2. 

Решение (II способ).

$$L: 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow -3y = -2x - 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$L_1 \perp L \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{3}{2} \quad [\text{по формуле } y - y_0 = k(x - x_0)]$$

$$\Rightarrow L_1: y - 1 = -\frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L_1: 3x + 2y + 1 = 0$$

$$L_2 \parallel L \Rightarrow k_2 = k = \frac{2}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow L_2: 2x - 3y - 5 = 0$$

Взаимное расположение двух прямых

$$L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1)$$

$$L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2)$$

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

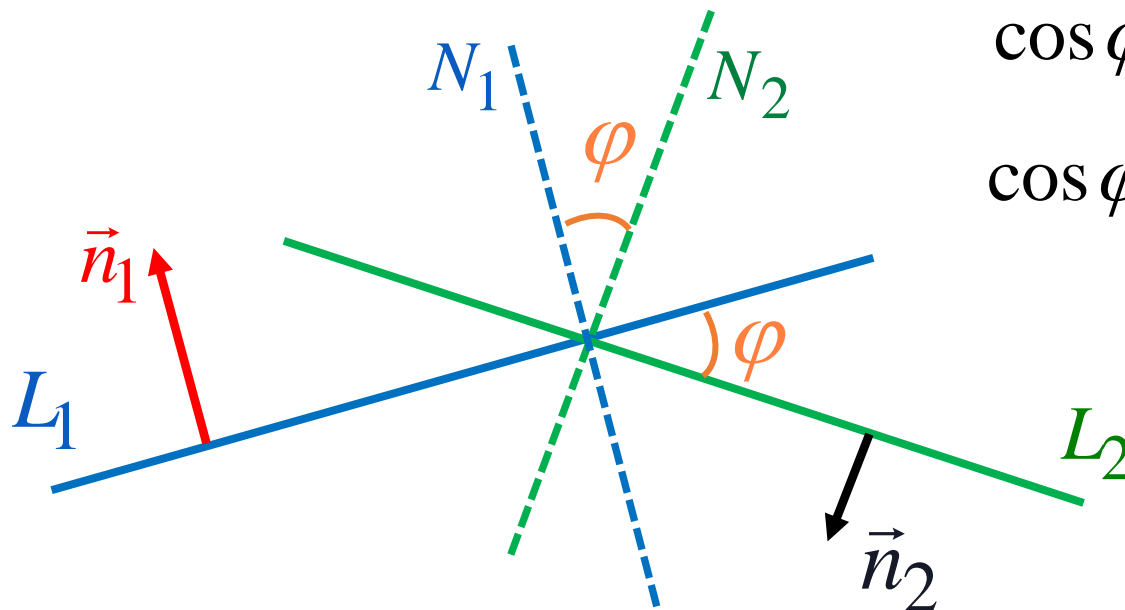
$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$L_1 \text{ и } L_2 \text{ пересекаются} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Угол между двумя прямыми

Утв. Острый угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен острому углу между прямыми, N_1 и N_2 перпендикулярными к данным.



$$\cos \varphi = \cos(L_1 L_2)$$

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2) \right|$$

Угол между двумя прямыми

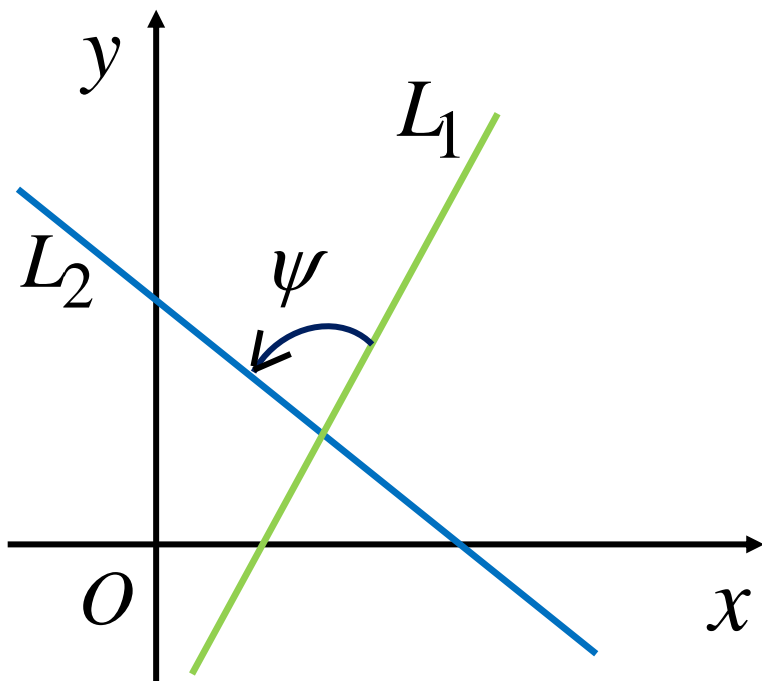
$$\cos \varphi = \cos(L_1 L_2) = \left| \cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2) \right|$$

$$\cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Угол между двумя прямыми

Опр. Углом ψ от прямой L_1 до прямой L_2 называется наименьший угол (пр. часов. стрелки), на которую нужно повернуть прямую L_1 до совмещения с прямой L_2 .



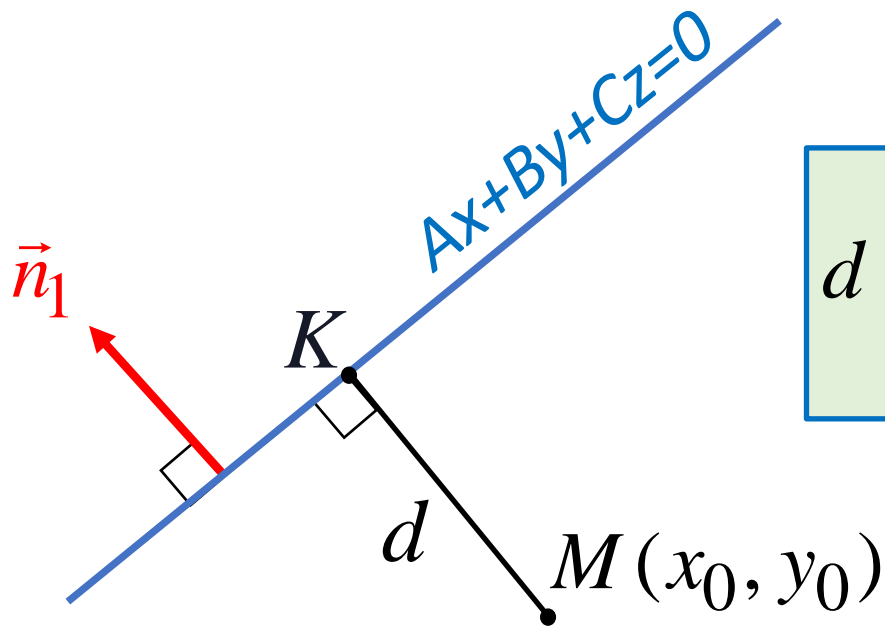
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

Взаимное расположение двух прямых

- Следствие. 1) $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$;
- 2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$;
- 3) $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$

Расстояние от точки до прямой



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$