Определение точки разрыва функции

Опр. Точка, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва.

Для того, чтобы подробнее изучить (классифицировать) точки разрыва, введем понятие односторонних пределов функции в точке.

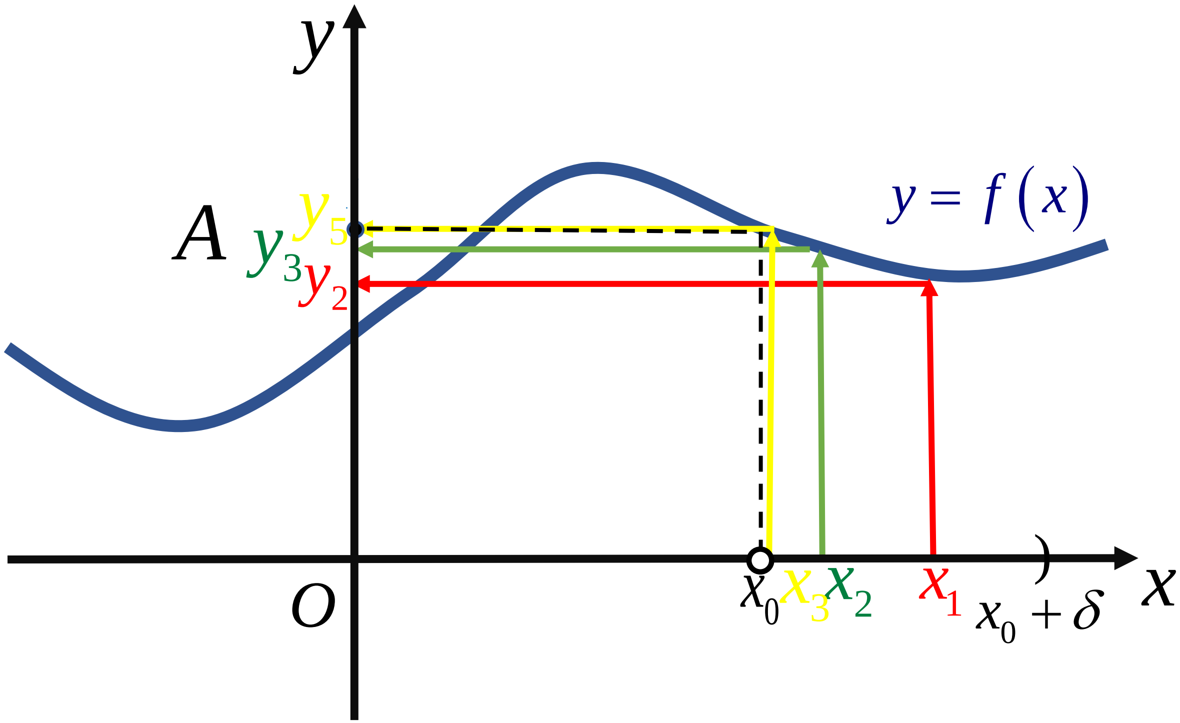
Определение односторонних пределов функции

Пусть функция $f(x)$ определена в правой выколотой δ-окрестности $(x_0; x_0 + \delta)$ точки $x = x_0$.

Опр. (по Гейне)

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 справа называется число A, такое, что для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_0 < x_n < x_0 + \delta$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

Определение односторонних пределов функции



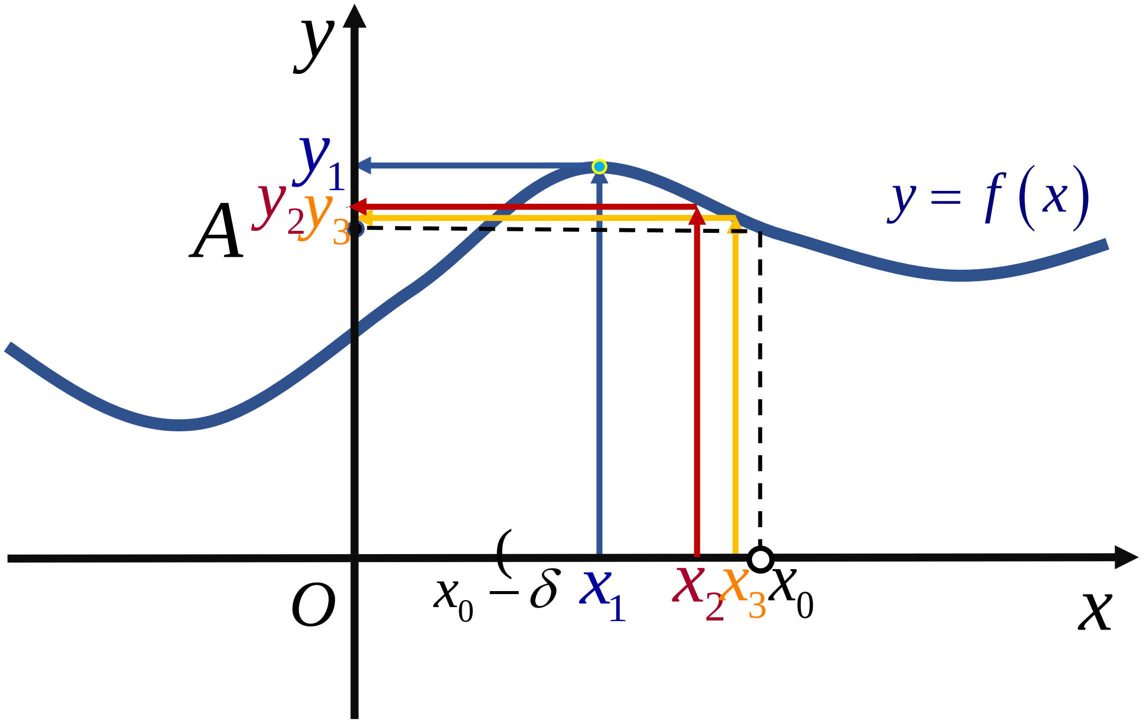
Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

Определение односторонних пределов функции

<u>Опр.</u> предела функции $f(x)$ в точке x_0 слева аналогично (самост.)

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Определение предела функции



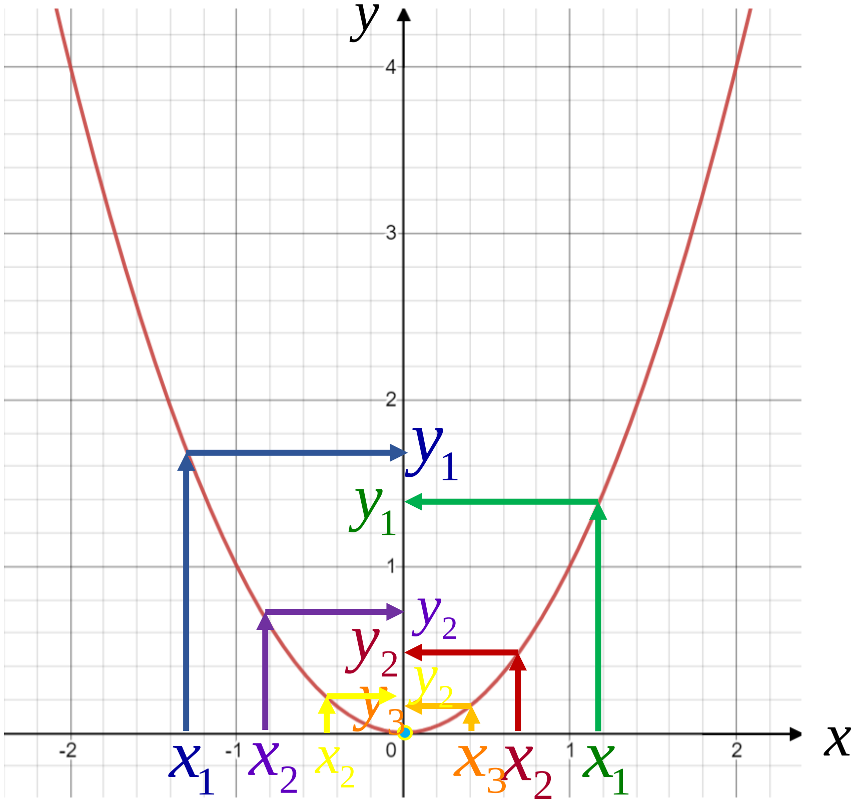
Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$

Определение односторонних пределов функции

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0$$



Определение односторонних пределов функции

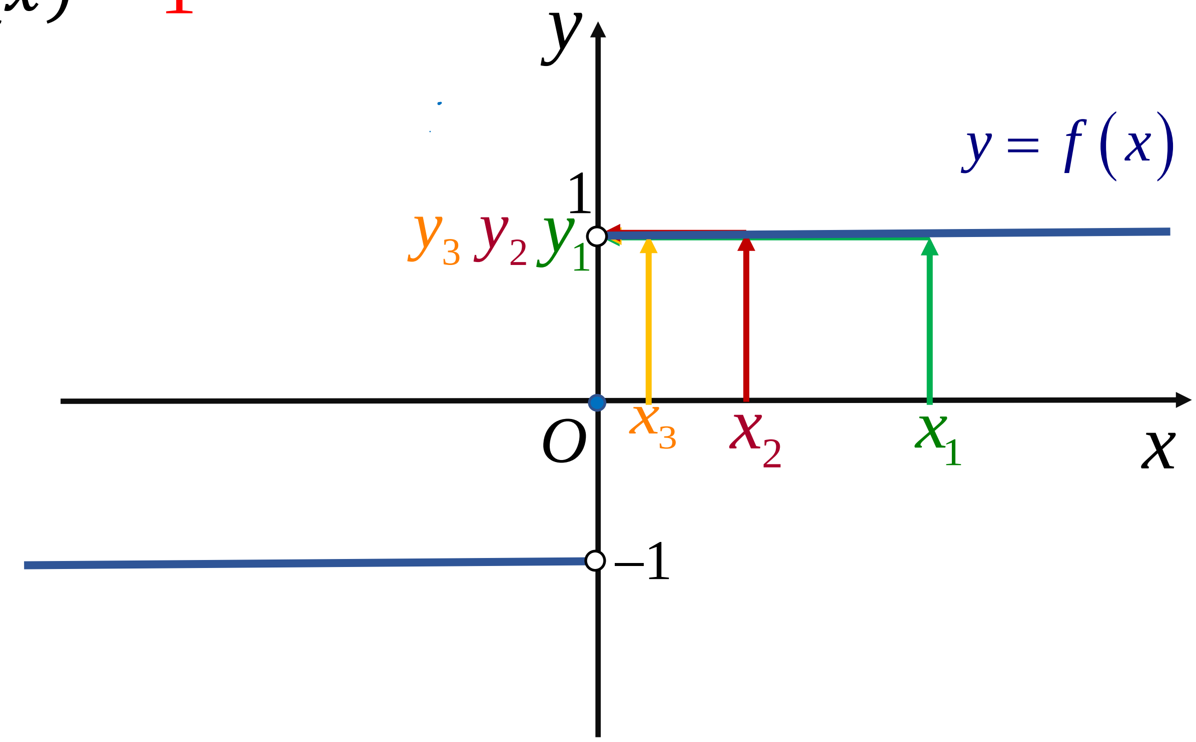
Пример 2. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$

Тогда $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} 1 = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} (-1) = -1$

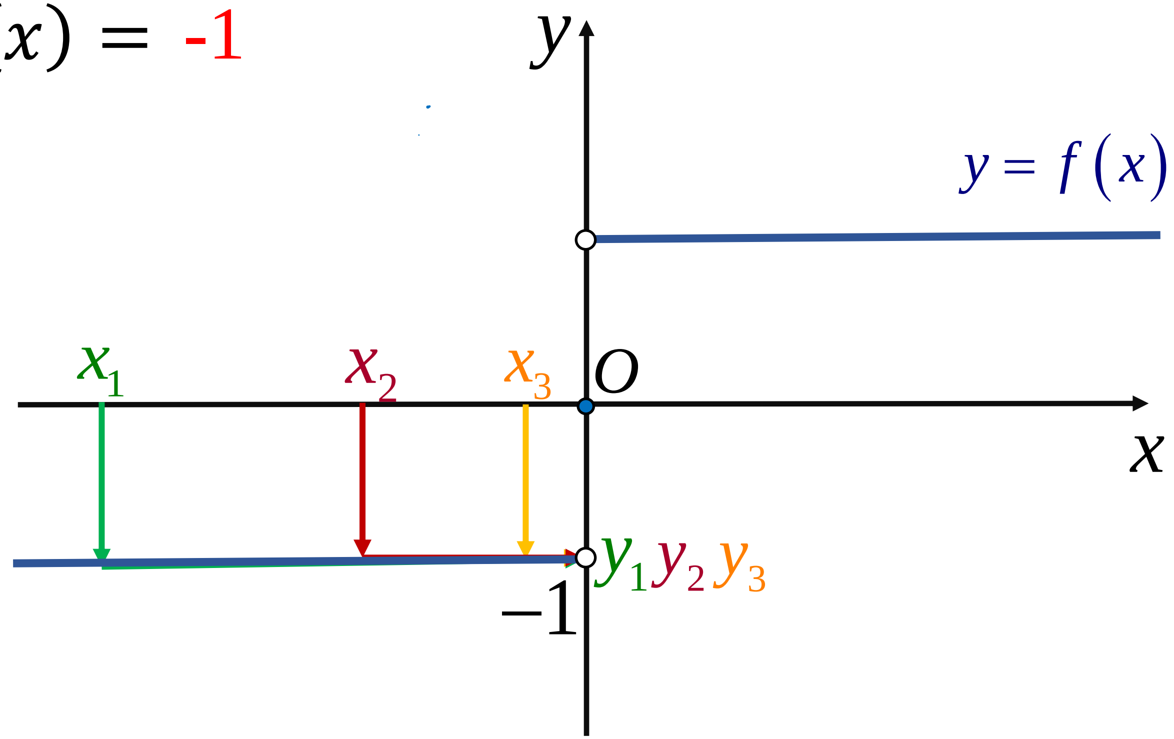
Определение односторонних пределов функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$$



Определение односторонних пределов функции

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1$$



Определение односторонних пределов функции

Замечание. Значение A может быть $\infty, +\infty, -\infty$.

Пример 3. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{+0}}\right] = [e^{+\infty}] = +\infty$$

Определение односторонних пределов функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{-0}}\right] = \left[e^{-\infty}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{e^{+\infty}}\right] = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

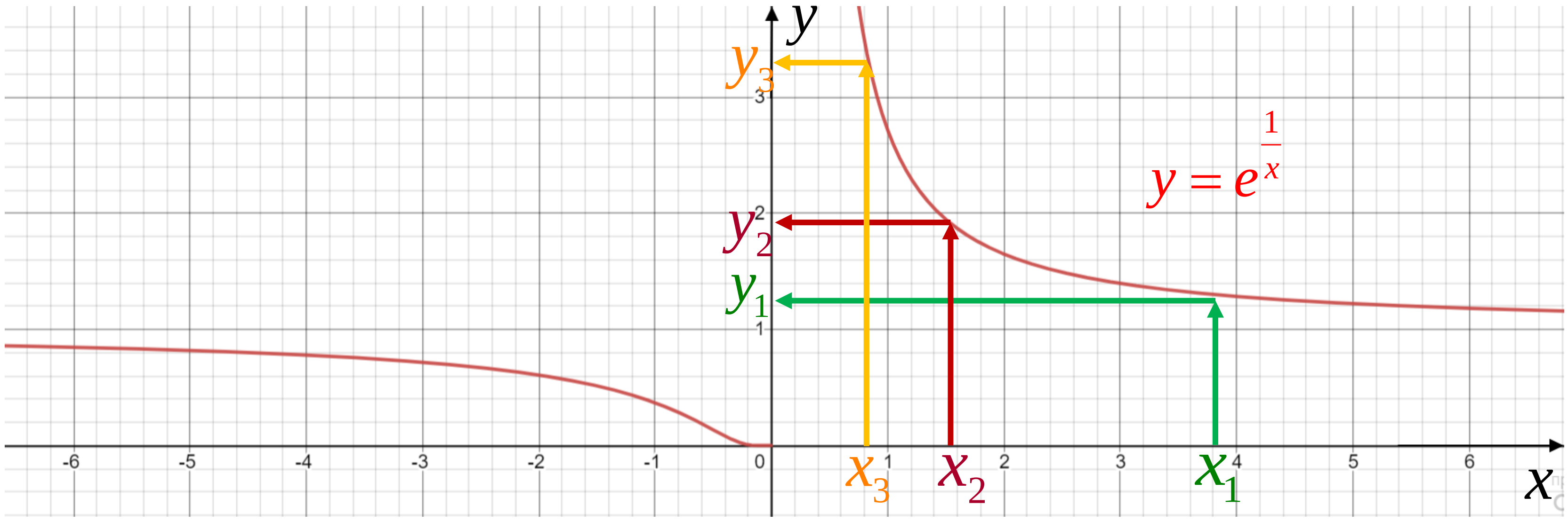
Определение односторонних пределов функции

<u>Пример 4.</u> Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$

Тогда $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$

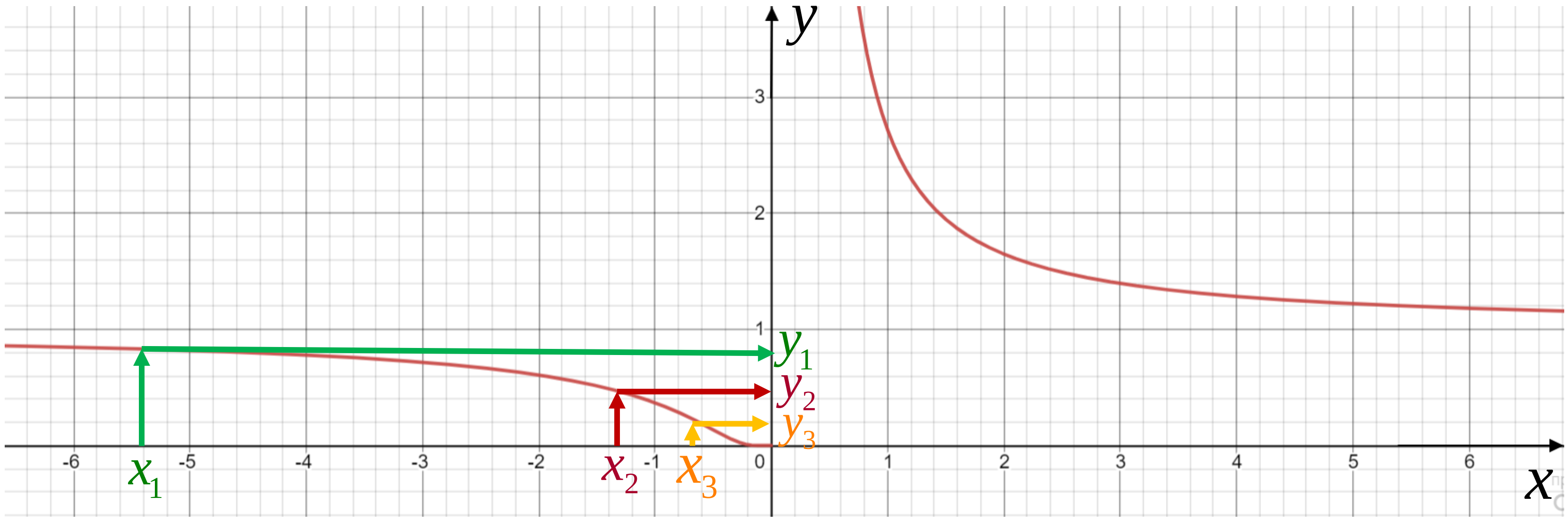
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-1) = -1$

Определение односторонних пределов функции



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Определение односторонних пределов функции



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Теорема о равенстве односторонних пределов

<u>Теорема 1</u> (о равенстве левого и правого предела предела). Конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные односторонние пределы

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, и они равны.

При этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Теорема о равенстве односторонних пределов

Пример 5.

Для $f(x)=x^2$ существуют конечные

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2=0 \Rightarrow$$ существует конечный

$$\lim_{x\to 0} x^2=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2=0$$

Определение функции, непрерывной в точке (более подробно)

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.
Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) $f(x)$ определена в точке $x = x_0$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от нарушения какого-либо условий (1)-(3).

Определение точки устранимого разрыва

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, за исключением, возможно, самой точки $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если

· существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

· функция $f(x)$ либо не определена в точке $x = x_0$,

· либо определена, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Теорема о равенстве односторонних пределов

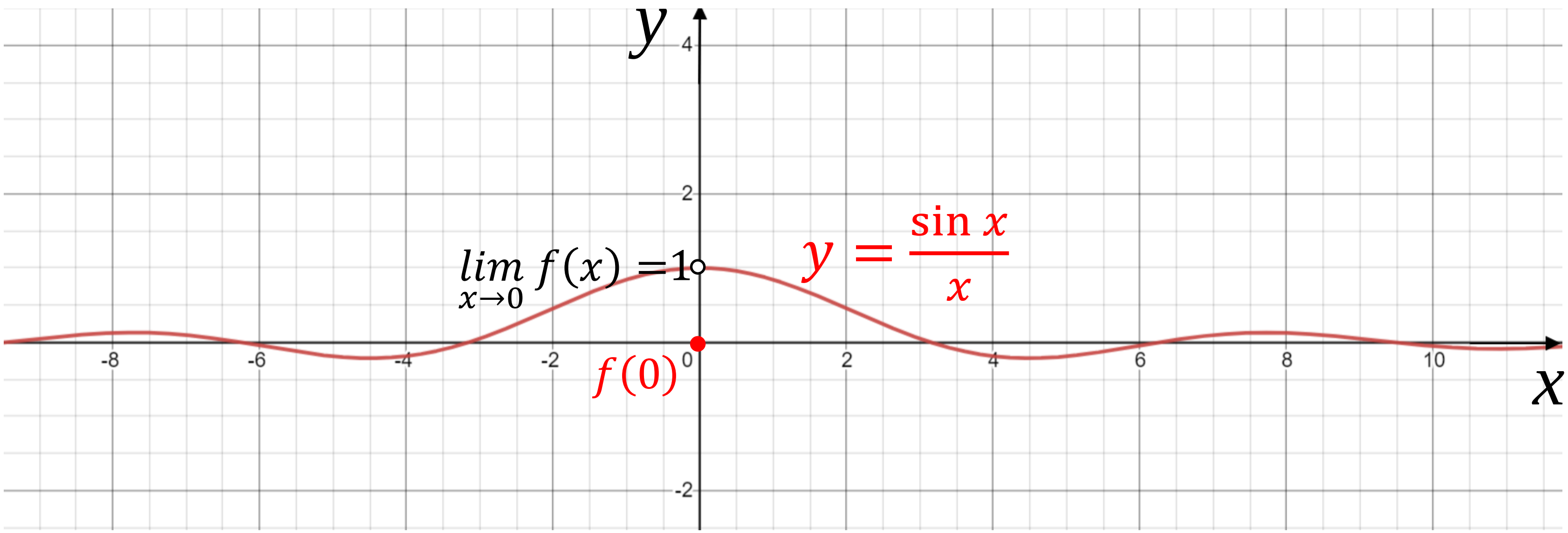
Пример 6. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \qquad f(0) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq 0 \Rightarrow x = 0 -$ точка устранимого разрыва функции $f(x)$.

Теорема о равенстве односторонних пределов



Определение точки (неустранимого) разрыва I-го рода

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, за исключением, возможно, самой точки $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ называется точкой (неустранимого) разрыва I-го рода функции $f(x)$, если

· существуют конечные пределы $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$,

· но они не равны.

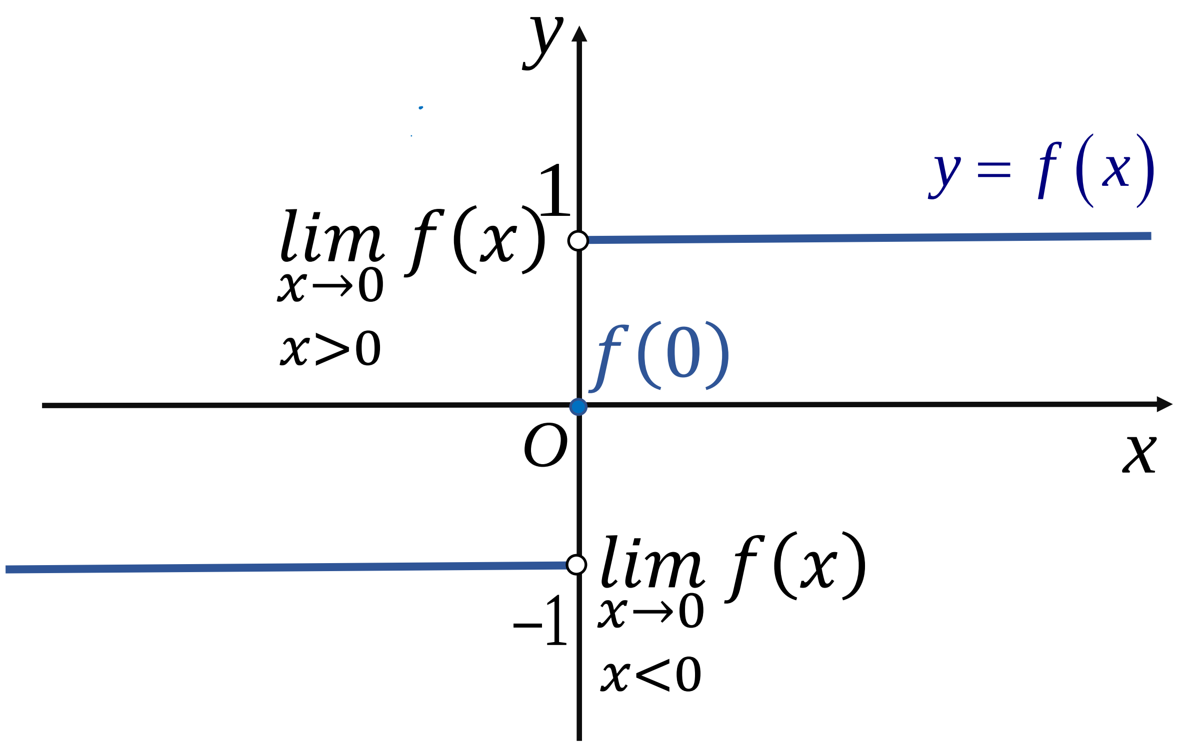
Определение точки (неустранимого) разрыва I-го рода

Пример 7. Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) \Rightarrow x = 0 \ -$ точка ого разрыва I рода функции $f(x)$.

Определение точки (неустранимого) разрыва I-го рода



Определение точки (неустранимого) разрыва II-го рода

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, за исключением, возможно, самой точки $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ называется точкой (неустранимого) разрыва II-го рода функции $f(x)$, если

· не существуют конечного предела $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$;

· или не существует конечного предела $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

Определение точки (неустранимого) разрыва II-го рода

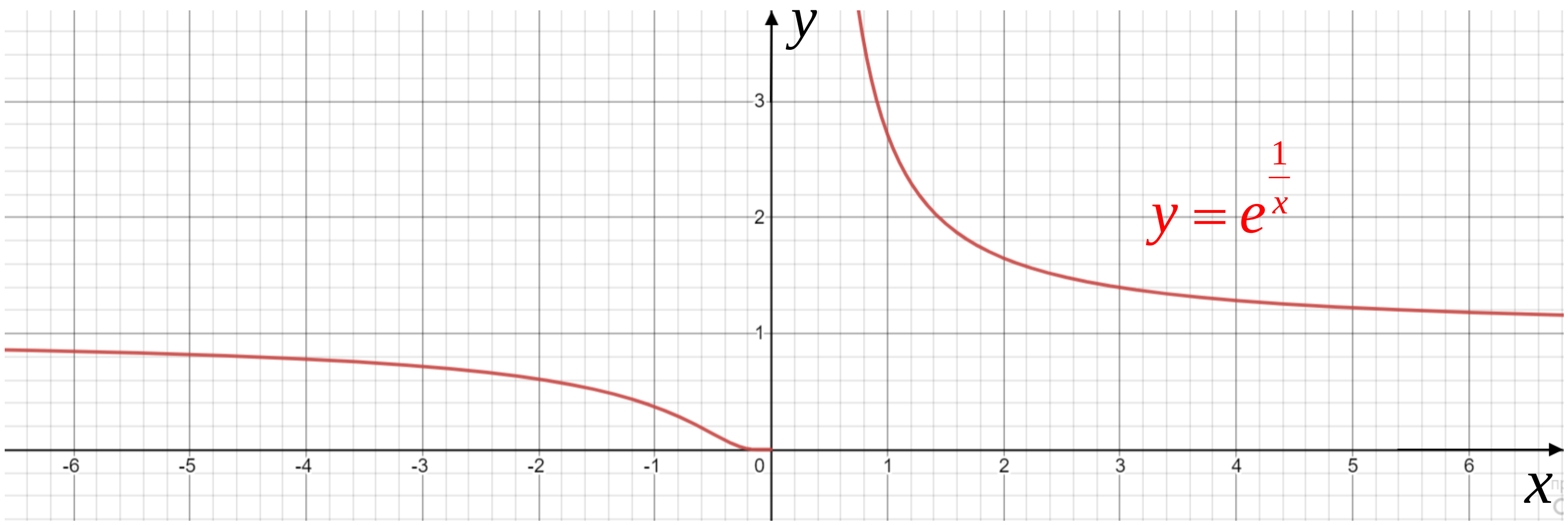
<u>Пример 8.</u> Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$$

Не существует конечного $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)$.

$\Rightarrow x = 0 -$ точка ого разрыва II рода функции $f(x)$.

Определение точки (неустранимого) разрыва II-го рода



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

Исследовать на непрерывность функцию

<u>Задача.</u> Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|}, \text{если } x \neq 0, \\ 1, \text{если } x = 0. \end{cases}$

Заметим, что $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x > 0, \\ -x, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x = 0 \end{cases}$

Исследовать на непрерывность функцию

Решение.

1) Пусть $x_0 > 0$.

Тогда существует $O(x_0) \subset (0; +\infty)$.

В $O(x_0)$ функция $f(x) = x$ и поэтому непрерывна

$$\Downarrow$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

2) Для случая $x_0 < 0$ аналогично.

$\Rightarrow$ функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Исследовать на непрерывность функцию

<u>Решение.</u> 3) Пусть $x_0 = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x) = 0$$

$\Rightarrow$ существует конечный

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$$

$f(0) = 1 \Rightarrow$ Функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ устранимый разрыв.