

Замкнутые классы и теорема Поста

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

15 ноября 2018 г.

Композиция булевых функций

Определение

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k)$ — булевы функции, их **композицией** называется

$$h(y_1, \dots, y_k) = f(g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k)).$$

Композиция булевых функций

Определение

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k)$ — булевы функции, их **композицией** называется

$$h(y_1, \dots, y_k) = f(g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k)).$$

Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \rightarrow x_2$. Видно, что на самом деле она не зависит от переменной x_3 . Поэтому говорят, что f **неявно зависит от переменной** x_3 . В этой лекции будем считать, что все булевы функции зависят от счетного числа переменных (просто от некоторых неявно).

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех булевых функций.

Пример композиции булевых функций

Рассмотрим стрелку Пирса $f(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \cdot y}$.

Пример композиции булевых функций

Рассмотрим стрелку Пирса $f(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \cdot y}$.

- Пусть $g_1(x) = g_2(x) = x$, тогда $f(x, x) = x \downarrow x = \overline{x}$;

Пример композиции булевых функций

Рассмотрим стрелку Пирса $f(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \cdot y}$.

- Пусть $g_1(x) = g_2(x) = x$, тогда $f(x, x) = x \downarrow x = \overline{x}$;
- Пусть $g_1(x, y) = g_2(x, y) = f(x, y) = x \downarrow y$, тогда

$$f(f(x, y), f(x, y)) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{(x \downarrow y)} = xy;$$

Пример композиции булевых функций

Рассмотрим стрелку Пирса $f(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \cdot y}$.

- Пусть $g_1(x) = g_2(x) = x$, тогда $f(x, x) = x \downarrow x = \overline{x}$;
- Пусть $g_1(x, y) = g_2(x, y) = f(x, y) = x \downarrow y$, тогда

$$f(f(x, y), f(x, y)) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{(x \downarrow y)} = xy;$$

- Так как $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$, то $x \vee y$ также можно выразить через $x \downarrow y$.

Пример композиции булевых функций

Рассмотрим стрелку Пирса $f(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \cdot y}$.

- Пусть $g_1(x) = g_2(x) = x$, тогда $f(x, x) = x \downarrow x = \overline{x}$;
- Пусть $g_1(x, y) = g_2(x, y) = f(x, y) = x \downarrow y$, тогда

$$f(f(x, y), f(x, y)) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{x \downarrow y} = xy;$$

- Так как $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$, то $x \vee y$ также можно выразить через $x \downarrow y$.

Так как любую функцию можно выразить через композицию $\overline{x}$, $x \cdot y$ и $x \vee y$ (то есть, например, написать СДНФ для этой функции), то на самом деле любую функцию можно представить в виде композиции стрелки Пирса.

Некоторые классы булевых функций

- $T_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — класс булевых функций, сохраняющих ноль;

Некоторые классы булевых функций

- $T_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — класс булевых функций, сохраняющих ноль;
- $T_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — класс булевых функций, сохраняющих единицу;

Некоторые классы булевых функций

- $T_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — класс булевых функций, сохраняющих ноль;
- $T_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — класс булевых функций, сохраняющих единицу;
- $S = \{f \in \mathcal{F} \mid \overline{f(x_1, \dots, x_n)} = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})\}$ — класс самодвойственных функций;

Проверка на самодвойственность

x	y	z	f
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

Проверка на самодвойственность

x	y	z	f
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

$$0 = f(0, 0, 1) = f(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}) \neq \overline{f(1, 1, 0)} = \bar{0}$$

Некоторые классы булевых функций

- $T_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — класс булевых функций, сохраняющих ноль;
- $T_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — класс булевых функций, сохраняющих единицу;
- $S = \{f \in \mathcal{F} \mid \overline{f(x_1, \dots, x_n)} = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})\}$ — класс самодвойственных функций;

Некоторые классы булевых функций

- $T_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — класс булевых функций, сохраняющих ноль;
- $T_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — класс булевых функций, сохраняющих единицу;
- $S = \{f \in \mathcal{F} \mid \overline{f(x_1, \dots, x_n)} = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})\}$ — класс самодвойственных функций;
- $M = \{f \in \mathcal{F} \mid a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n)\}$ — класс монотонных функций;

Некоторые классы булевых функций

- $T_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$ — класс булевых функций, сохраняющих ноль;
- $T_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ — класс булевых функций, сохраняющих единицу;
- $S = \{f \in \mathcal{F} \mid \overline{f(x_1, \dots, x_n)} = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})\}$ — класс самодвойственных функций;
- $M = \{f \in \mathcal{F} \mid a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n)\}$ — класс монотонных функций;
- $L = \{f \in \mathcal{F} \mid f = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n, a_i \in \{0, 1\}\}.$

Замкнутые классы булевых функций

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ — класс булевых функций. Класс $\mathcal{K}$ называется **замкнутым**, если композиция функций из этого класса принадлежит этому классу.

Замкнутые классы булевых функций

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ — класс булевых функций. Класс $\mathcal{K}$ называется **замкнутым**, если композиция функций из этого класса принадлежит этому классу.

Утверждение. (Упражнение.)

Классы T_0 , T_1 , S , M , L являются замкнутыми.

Замкнутые классы булевых функций

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ — класс булевых функций. Класс $\mathcal{K}$ называется **замкнутым**, если композиция функций из этого класса принадлежит этому классу.

Утверждение. (Упражнение.)

Классы T_0 , T_1 , S , M , L являются замкнутыми.

Рассмотрим $f(x_1, \dots, x_n), g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k) \in T_0$.
Построим композицию этих функций:

$$h(y_1, \dots, y_k) = f(g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k))$$

Замкнутые классы булевых функций

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ — класс булевых функций. Класс $\mathcal{K}$ называется **замкнутым**, если композиция функций из этого класса принадлежит этому классу.

Утверждение. (Упражнение.)

Классы T_0 , T_1 , S , M , L являются замкнутыми.

Рассмотрим $f(x_1, \dots, x_n), g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k) \in T_0$.
Построим композицию этих функций:

$$h(y_1, \dots, y_k) = f(g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k))$$

Найдем

$h(0, \dots, 0) = f(g_1(0, \dots, 0), \dots, g_n(0, \dots, 0)) = f(0, \dots, 0) = 0$, откуда
 $h \in T_0$.

Упражнение. Докажите, что пересечение двух замкнутых классов является замкнутым классом.

Замыкание класса булевых функций

Упражнение. Докажите, что пересечение двух замкнутых классов является замкнутым классом.

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ — класс булевых функций. **Замыканием** класса $\mathcal{K}$ называется класс $C(\mathcal{K})$, который является пересечением всех замкнутых классов, содержащих $\mathcal{K}$.

Замыкание класса булевых функций

Упражнение. Докажите, что пересечение двух замкнутых классов является замкнутым классом.

Определение

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ — класс булевых функций. **Замыканием** класса $\mathcal{K}$ называется класс $C(\mathcal{K})$, который является пересечением всех замкнутых классов, содержащих $\mathcal{K}$.

По сути замыкание класса $\mathcal{K}$ состоит из булевых функций, которые можно получить из композиции тех функций, что лежат в классе $\mathcal{K}$

Полные классы булевых функций

Определение

Класс называется **полным**, если $C(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$.

Полные классы булевых функций

Определение

Класс называется **полным**, если $C(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$.

Полные классы

Полные классы булевых функций

Определение

Класс называется **полным**, если $C(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$.

Полные классы

- $\{\neg, \vee, \wedge\}$;

Полные классы булевых функций

Определение

Класс называется **полным**, если $C(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$.

Полные классы

- $\{\neg, \vee, \wedge\}$;
- $\{\downarrow\}$;

Полные классы булевых функций

Определение

Класс называется **полным**, если $C(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$.

Полные классы

- $\{\neg, \vee, \wedge\}$;
- $\{\downarrow\}$;
- $\{0, 1, +, \cdot\}$.

Полные классы булевых функций

Определение

Класс называется **полным**, если $C(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$.

Полные классы

- $\{\neg, \vee, \wedge\}$;
- $\{\downarrow\}$;
- $\{0, 1, +, \cdot\}$.

Упражнение. Докажите, что T_0, T_1, S, M, L не являются полными.

Теорема (Пост, 1941)

Класс $\mathcal{K}$ является полным тогда и только тогда, когда он содержит функцию, не сохраняющую ноль, функцию, не сохраняющую единицу, несамодвойственную, немонотонную и нелинейную функцию.

Теорема (Пост, 1941)

Класс $\mathcal{K}$ является полным тогда и только тогда, когда он содержит функцию, не сохраняющую ноль, функцию, не сохраняющую единицу, несамодвойственную, немонотонную и нелинейную функцию.

$\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{K} \subseteq T_0$. Тогда по определению замыкания $C(\mathcal{K}) \subseteq T_0$ (так как T_0 — замкнутый класс, содержащий $\mathcal{K}$). Но тогда $C(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$ и класс $\mathcal{K}$ не замкнут.

Теорема (Пост, 1941)

Класс $\mathcal{K}$ является полным тогда и только тогда, когда он содержит функцию, не сохраняющую ноль, функцию, не сохраняющую единицу, несамодвойственную, немонотонную и нелинейную функцию.

$\Rightarrow$ Пусть $\mathcal{K} \subseteq T_0$. Тогда по определению замыкания $C(\mathcal{K}) \subseteq T_0$ (так как T_0 — замкнутый класс, содержащий $\mathcal{K}$). Но тогда $C(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$ и класс $\mathcal{K}$ не замкнут.

$\Leftarrow$ Обозначим $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_S \notin S$, $f_M \notin M$, $f_L \notin L$ — функции из класса $\mathcal{K}$. Чтобы доказать теорему мы докажем три леммы.

Лемма 1

Лемма 1

$0, 1 \in C(\{\neg, f_5\})$

Лемма 1

Лемма 1

$$0, 1 \in C(\{\neg, f_S\})$$

Функция $f_S(x_1, \dots, x_n)$ несамо двойственна. Это означает, что существует $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что $f_S(a_1, \dots, a_n) = f_S(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$.

Лемма 1

Лемма 1

$$0, 1 \in C(\{\neg, f_S\})$$

Функция $f_S(x_1, \dots, x_n)$ несамоудовлетворительна. Это означает, что существует $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что

$$f_S(a_1, \dots, a_n) \neq f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n).$$

Рассмотрим функции $g_1(x) = x^{a_1}, \dots, g_n(x) = x^{a_n}$ (заметим, что $g_i(x) = x$ или $\bar{x}$).

Лемма 1

$$0, 1 \in C(\{\neg, f_S\})$$

Функция $f_S(x_1, \dots, x_n)$ несамоудовлетворительна. Это означает, что существует $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что

$$f_S(a_1, \dots, a_n) \neq f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n).$$

Рассмотрим функции $g_1(x) = x^{a_1}, \dots, g_n(x) = x^{a_n}$ (заметим, что $g_i(x) = x$ или $\bar{x}$).

Пусть $h(x) = f_S(g_1(x), \dots, g_n(x)) = f_S(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$.

Лемма 1

Лемма 1

$$0, 1 \in C(\{\neg, f_S\})$$

Функция $f_S(x_1, \dots, x_n)$ несамоудовлетворительна. Это означает, что существует $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что

$$f_S(a_1, \dots, a_n) \neq f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n).$$

Рассмотрим функции $g_1(x) = x^{a_1}, \dots, g_n(x) = x^{a_n}$ (заметим, что $g_i(x) = x$ или $\bar{x}$).

Пусть $h(x) = f_S(g_1(x), \dots, g_n(x)) = f_S(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$.

Тогда

$$h(0) = f_S(0^{a_1}, \dots, 0^{a_n}) = f_S(a_1^0, \dots, a_n^0) = f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$$

Лемма 1

$$0, 1 \in C(\{\neg, f_S\})$$

Функция $f_S(x_1, \dots, x_n)$ несамодвойственна. Это означает, что существует $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что

$$f_S(a_1, \dots, a_n) \neq f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n).$$

Рассмотрим функции $g_1(x) = x^{a_1}, \dots, g_n(x) = x^{a_n}$ (заметим, что $g_i(x) = x$ или $\bar{x}$).

Пусть $h(x) = f_S(g_1(x), \dots, g_n(x)) = f_S(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$.

Тогда

$$h(0) = f_S(0^{a_1}, \dots, 0^{a_n}) = f_S(a_1^0, \dots, a_n^0) = f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$$

$$h(1) = f_S(1^{a_1}, \dots, 1^{a_n}) = f_S(a_1^1, \dots, a_n^1) = f_S(a_1, \dots, a_n)$$

Лемма 1

$$0, 1 \in C(\{\neg, f_S\})$$

Функция $f_S(x_1, \dots, x_n)$ несамоудовлетворительна. Это означает, что существует $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что

$$f_S(a_1, \dots, a_n) \neq f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n).$$

Рассмотрим функции $g_1(x) = x^{a_1}, \dots, g_n(x) = x^{a_n}$ (заметим, что $g_i(x) = x$ или $\bar{x}$).

Пусть $h(x) = f_S(g_1(x), \dots, g_n(x)) = f_S(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$.

Тогда

$$h(0) = f_S(0^{a_1}, \dots, 0^{a_n}) = f_S(a_1^0, \dots, a_n^0) = f_S(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$$

$$h(1) = f_S(1^{a_1}, \dots, 1^{a_n}) = f_S(a_1^1, \dots, a_n^1) = f_S(a_1, \dots, a_n)$$

Так как $h(0) \neq h(1)$, то $h(x)$ — константа. Следовательно, $\overline{h(x)}$ — другая константа.

Лемма 2

$$\neg \in C(\{0, 1, f_M\})$$

Лемма 2

$$\neg \in C(\{0, 1, f_M\})$$

Так как f_M немонотонна, то существуют наборы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ такие, что $a_i \leq b_i \quad 1 \leq i \leq n$, но $f_M(a_1, \dots, a_n) = 1$, $f_M(b_1, \dots, b_n) = 0$.

Лемма 2

$$\neg \in C(\{0, 1, f_M\})$$

Так как f_M немонотонна, то существуют наборы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ такие, что $a_i \leq b_i \quad 1 \leq i \leq n$, но $f_M(a_1, \dots, a_n) = 1$, $f_M(b_1, \dots, b_n) = 0$.

Заметим, что можно считать, что $\exists i \quad a_i = 0, b_i = 1$ и $a_j = b_j \quad \forall j \neq i$.

Лемма 2

$$\neg \in C(\{0, 1, f_M\})$$

Так как f_M немонотонна, то существуют наборы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ такие, что $a_i \leq b_i \quad 1 \leq i \leq n$, но $f_M(a_1, \dots, a_n) = 1$, $f_M(b_1, \dots, b_n) = 0$.

Заметим, что можно считать, что $\exists i \quad a_i = 0, b_i = 1$ и $a_j = b_j \quad \forall j \neq i$.
Рассмотрим $g(x) = f_M(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in (\{0, 1, f_M\})$.

Лемма 2

$$\neg \in C(\{0, 1, f_M\})$$

Так как f_M немонотонна, то существуют наборы $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ такие, что $a_i \leq b_i \quad 1 \leq i \leq n$, но $f_M(a_1, \dots, a_n) = 1$, $f_M(b_1, \dots, b_n) = 0$.

Заметим, что можно считать, что $\exists i \quad a_i = 0, b_i = 1$ и $a_j = b_j \quad \forall j \neq i$.

Рассмотрим $g(x) = f_M(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in (\{0, 1, f_M\})$.

Тогда

$$g(0) = 1, g(1) = 0 \Rightarrow g(x) = \neg x$$

Лемма 3

$\vee, \wedge \in C(\{0, 1, \neg, f_L\})$

Лемма 3

$$\vee, \wedge \in C(\{0, 1, \neg, f_L\})$$

Так как f_L нелинейна, то у нее есть одночлены степени больше или равные 2. Пусть $y_1 y_2 \cdots y_k$ — нелинейный член наименьшей степени из возможных.

Лемма 3

$$\vee, \wedge \in C(\{0, 1, \neg, f_L\})$$

Так как f_L нелинейна, то у нее есть одночлены степени больше или равные 2. Пусть $y_1 y_2 \cdots y_k$ — нелинейный член наименьшей степени из возможных.

Обозначим через $Z = \{z_1, \dots, z_p\}$ переменные, которые не входят в выделенный одночлен (возможно, что $Z = \emptyset$). Сделаем замену $y_1 = x, y_2 = y, y_2 = \dots = y_k = 1, z_1 = \dots = z_p = 0$.

Лемма 3

$$\vee, \wedge \in C(\{0, 1, \neg, f_L\})$$

Так как f_L нелинейна, то у нее есть одночлены степени больше или равные 2. Пусть $y_1 y_2 \cdots y_k$ — нелинейный член наименьшей степени из возможных.

Обозначим через $Z = \{z_1, \dots, z_p\}$ переменные, которые не входят в выделенный одночлен (возможно, что $Z = \emptyset$). Сделаем замену $y_1 = x, y_2 = y, y_2 = \dots = y_k = 1, z_1 = \dots = z_p = 0$.

Тогда выделенный одночлен превратиться в xy , а остальные либо линейны, либо нелинейны и обязательно содержат переменную из множества Z и обращаются в 0. Поэтому после такой замены получим функцию

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

(1.1) $b = c = 0, h(x, y) = xy;$

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

(1.1) $b = c = 0, h(x, y) = xy;$

(1.2) $b = 1, c = 0, h(x, y) = x + xy = (x + 1)y = \bar{x}y;$

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

(1.1) $b = c = 0, h(x, y) = xy;$

(1.2) $b = 1, c = 0, h(x, y) = x + xy = (x + 1)y = \bar{x}y;$

(1.3.) $b = 0, c = 1, h(x, y) = y + xy = x\bar{y};$

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

(1.1) $b = c = 0, h(x, y) = xy;$

(1.2) $b = 1, c = 0, h(x, y) = x + xy = (x + 1)y = \bar{x}y;$

(1.3.) $b = 0, c = 1, h(x, y) = y + xy = x\bar{y};$

(1.4.) $b = c = 1, h(x, y) = x + y + xy = x \vee y$

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

(1.1) $b = c = 0, h(x, y) = xy;$

(1.2) $b = 1, c = 0, h(x, y) = x + xy = (x + 1)y = \bar{x}y;$

(1.3.) $b = 0, c = 1, h(x, y) = y + xy = x\bar{y};$

(1.4.) $b = c = 1, h(x, y) = x + y + xy = x \vee y$

В первых трех случаях мы получили xy и так как $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$, то можем получить дизъюнкцию. Аналогично, в последнем случае можно получить конъюнкцию из дизъюнкции и отрицания.

$$h(x, y) = a + bx + cy + xy, \text{ где } a, b, c \in \{0, 1\}$$

Сл. 1. $a = 0$.

(1.1) $b = c = 0, h(x, y) = xy;$

(1.2) $b = 1, c = 0, h(x, y) = x + xy = (x + 1)y = \bar{x}y;$

(1.3.) $b = 0, c = 1, h(x, y) = y + xy = x\bar{y};$

(1.4.) $b = c = 1, h(x, y) = x + y + xy = x \vee y$

В первых трех случаях мы получили xy и так как $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$, то можем получить дизъюнкцию. Аналогично, в последнем случае можно получить конъюнкцию из дизъюнкции и отрицания.

Сл. 2 $a = 1, h(x, y) = 1 + bx + cy + xy = \overline{bx + cy + xy}$ и этот случай сводится к случаю 1.

Доказательство достаточности теоремы Поста

Пусть $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$, $f_1(y_1, \dots, y_k) \notin T_1$. Рассмотрим $h_1(x) = f_0(x, \dots, x)$, $h_2(x) = f_1(x, \dots, x)$. Тогда

Доказательство достаточности теоремы Поста

Пусть $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$, $f_1(y_1, \dots, y_k) \notin T_1$. Рассмотрим $h_1(x) = f_0(x, \dots, x)$, $h_2(x) = f_1(x, \dots, x)$. Тогда

$h_1(0)$	$h_1(1)$	$h_2(0)$	$h_2(1)$	
1	0	0	0	(1)
1	0	1	0	(1)
1	1	0	0	(2)
1	1	1	0	(1)

Доказательство достаточности теоремы Поста

Пусть $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$, $f_1(y_1, \dots, y_k) \notin T_1$. Рассмотрим $h_1(x) = f_0(x, \dots, x)$, $h_2(x) = f_1(x, \dots, x)$. Тогда

$h_1(0)$	$h_1(1)$	$h_2(0)$	$h_2(1)$	
1	0	0	0	(1)
1	0	1	0	(1)
1	1	0	0	(2)
1	1	1	0	(1)

В случае (1) одна из функций будет равна $\bar{x}$, тогда по лемме 2 $0, 1 \in C(\{\neg, f_M\}) \subseteq C(\mathcal{K})$. А значит по лемме 3 $\wedge, \vee \in C(\{0, 1, \neg, f_k\}) \subseteq C(\mathcal{K})$. Следовательно, $\mathcal{F} = C(\{\neg, \vee, \wedge\}) \subseteq C(\mathcal{K})$ и класс полон.

Доказательство достаточности теоремы Поста

Пусть $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$, $f_1(y_1, \dots, y_k) \notin T_1$. Рассмотрим $h_1(x) = f_0(x, \dots, x)$, $h_2(x) = f_1(x, \dots, x)$. Тогда

$h_1(0)$	$h_1(1)$	$h_2(0)$	$h_2(1)$	
1	0	0	0	(1)
1	0	1	0	(1)
1	1	0	0	(2)
1	1	1	0	(1)

В случае (1) одна из функций будет равна $\bar{x}$, тогда по лемме 2 $0, 1 \in C(\{\neg, f_M\}) \subseteq C(\mathcal{K})$. А значит по лемме 3

$\wedge, \vee \in C(\{0, 1, \neg, f_k\}) \subseteq C(\mathcal{K})$. Следовательно,

$\mathcal{F} = C(\{\neg, \vee, \wedge\}) \subseteq C(\mathcal{K})$ и класс полон.

В случае (2) $0, 1 \in C(\mathcal{K})$, откуда по лемме 1 $\neg \in C(\mathcal{K})$. Аналогично первому случаю получаем по лемме 3, что $\vee, \wedge \in C(\mathcal{K})$. Откуда опять получаем полноту класса $\mathcal{K}$.

Следствие из теоремы Поста о базисе

Определение

Класс булевых функций $\mathcal{B}$ называется **базисом** класса всех булевых функций, если $\mathcal{B}$ полон и $\forall \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ класс $\mathcal{B}'$ не является полным.

Следствие из теоремы Поста о базисе

Определение

Класс булевых функций $\mathcal{B}$ называется **базисом** класса всех булевых функций, если $\mathcal{B}$ полон и $\forall \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ класс $\mathcal{B}'$ не является полным.

Следствие 1

В любом базисе не более четырех булевых функций.

Следствие из теоремы Поста о базисе

Определение

Класс булевых функций $\mathcal{B}$ называется **базисом** класса всех булевых функций, если $\mathcal{B}$ полон и $\forall \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ класс $\mathcal{B}'$ не является полным.

Следствие 1

В любом базисе не более четырех булевых функций.

Рассмотрим функцию $f_0(x_1, \dots, x_n)$ такую, что $f_0(0, \dots, 0) = 1$. Если $f_0(1, \dots, 1) = 0$, то ее можно взять в качестве функции не сохраняющей 1. А если $f_0(1, \dots, 1) = 1$, то f_0 несамо двойственна.

Следствие 2

Классы T_0, T_1, S, M, L являются максимальными замкнутыми, но не полными классами.

Следствие 2

Классы T_0, T_1, S, M, L являются максимальными замкнутыми, но не полными классами.

Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый неполный класс, который содержит в себе все пять классов, но не совпадает ни с одним из них. Тогда в $\mathcal{K}$ есть функция, не сохраняющая ноль, функция, не сохраняющая единицу, несамодвойственная, немонотонная и нелинейная функции. По теореме Поста класс $\mathcal{K}$ является полным. Противоречие.