

Булевы функции и их нормальные формы

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

11 ноября 2018 г.

Определение и некоторые булевы функции

Определение

Булевой функцией от n переменных называется отображение $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Определение и некоторые булевы функции

Определение

Булевой функцией от n переменных называется отображение $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Основные булевы функции.

x	y	$\neg x$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x + y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Определение и некоторые булевы функции

Определение

Булевой функцией от n переменных называется отображение $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Основные булевы функции.

x	y	$\neg x$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x + y$	$x y$	$x \downarrow y$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

$\neg x$ ($\bar{x}$) — отрицание,

$x \vee y$ — дизъюнкция, $x \wedge y$ ($x \cdot y$) — конъюнкция,

$x \rightarrow y$ — импликация, $x \leftrightarrow y$ — эквиваленция,

$x + y$ ($x \oplus y$) — сложение по модулю два или хог,

$x|y$ — штрих Шеффера, $x \downarrow y$ — стрелка Пирса.

Булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ равны, если

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n \quad f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$$

1) $x \vee x = x$

2) $x \wedge x = x$

3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

5) $x \vee y = y \vee x$

6) $x \wedge y = y \wedge x$

7) $x \vee (y \wedge x) = x$

8) $x \wedge (y \vee x) = x$

9) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

10) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

11) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

12) $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

13) $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$

14) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

Булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ равны, если

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n \quad f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$$

1) $x \vee x = x$

2) $x \wedge x = x$

3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

5) $x \vee y = y \vee x$

6) $x \wedge y = y \wedge x$

7) $x \vee (y \wedge x) = x$

8) $x \wedge (y \vee x) = x$

9) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

10) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

11) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$

12) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

13) $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$

14) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

Булевы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ равны, если
 $\forall(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n \quad f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$

1) $x \vee x = x$

2) $x \wedge x = x$

3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

5) $x \vee y = y \vee x$

6) $x \wedge y = y \wedge x$

7) $x \vee (y \wedge x) = x$

8) $x \wedge (y \vee x) = x$

9) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

10) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

11) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$

12) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

13) $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$

14) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

Так как каждая булева функция от n переменных задается таблице из 2^n значений, то число таких различных булевых функций равно 2^{2^n} .

Элементарные конъюнкции и дизъюнкции

Договоримся, что переменные мы будем обозначать буквы x, y, z с конца алфавита, тогда как буквы из начала a, b, c будут обозначать константы (0 или 1).

Элементарные конъюнкции и дизъюнкции

Договоримся, что переменные мы будем обозначать буквы x, y, z с конца алфавита, тогда как буквы из начала a, b, c будут обозначать константы (0 или 1).

Определение

Рассмотрим булеву функцию $x^a = \begin{cases} x, & a = 1 \\ \bar{x}, & a = 0 \end{cases}$

Литералом будем называть $x^1 = x$ или $x^0 = \bar{x}$. **Элементарной дизъюнкцией** называется дизъюнкция литералов различных переменных, т.е. $x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee \dots \vee x_k^{a_k}$, где $x_1, x_2, \dots, x_k$ — различные переменные. **Элементарной конъюнкцией** называется дизъюнкция литералов различных переменных, т.е. $x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_k^{a_k}$, где $x_1, x_2, \dots, x_k$ — различные переменные.

Лемма 1

- 1) $x^y = y^x$;
- 2) $\overline{x^a} = x^{\bar{a}}$
- 3) $x^a = 1 \Leftrightarrow x = a$;
- 4) $x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_k^{a_k} = 1 \Leftrightarrow x_1 = a_1, \dots, x_k = a_k$.

Лемма 1

- 1) $x^y = y^x$;
- 2) $\overline{x^a} = x^{\overline{a}}$
- 3) $x^a = 1 \Leftrightarrow x = a$;
- 4) $x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_k^{a_k} = 1 \Leftrightarrow x_1 = a_1, \dots, x_k = a_k$.

Рассмотрим таблицу истинности для x^y :

x	y	x^y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Докажем, что функции равны:

Пусть $f(a_1, \dots, a_n) = 1$. Тогда справа существует конъюнкт $x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}$, который равен 1 при подстановке $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ по лемме 1.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Докажем, что функции равны:

Пусть $f(a_1, \dots, a_n) = 1$. Тогда справа существует конъюнкт $x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}$, который равен 1 при подстановке $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ по лемме 1.

Пусть $f(b_1, \dots, b_n) = 0$. Рассмотрим произвольный конъюнкт справа $x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}$. Так как $f(a_1, \dots, a_n) = 1$, то $(a_1, \dots, a_n) \neq (b_1, \dots, b_n)$. Следовательно, $b_1^{a_1} \wedge \dots \wedge b_n^{a_n} = 0$ по лемме 1. Тогда вся дизъюнкция принимает значение 0. Итак, мы показали, что две функции равны.

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Докажем единственность. Число ненулевых булевых функций от n переменных равно $2^{2^n} - 1$.

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Докажем единственность. Число ненулевых булевых функций от n переменных равно $2^{2^n} - 1$. Найдем число различных булевых функций, которые имеют вид 1. Так как каждый литерал имеет вид либо x^0 , либо x^1 , то число элементарных конъюнкций от n переменных равно 2^n .

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Докажем единственность. Число ненулевых булевых функций от n переменных равно $2^{2^n} - 1$. Найдем число различных булевых функций, которые имеют вид 1. Так как каждый литерал имеет вид либо x^0 , либо x^1 , то число элементарных конъюнкций от n переменных равно 2^n . Каждая функция вида 1 — это непустое подмножество множества всех элементарных конъюнкций, то есть $2^{2^n} - 1$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Теорема 1

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 0) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(a_1, a_2, \dots, a_n)=1} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}. \quad (1)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки конъюнктов.

Определение

Функция вида 1 называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)** для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Теорема 2

Любую булеву функцию f от n переменных (за исключением тождественно равной 1) можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{f(b_1, b_2, \dots, b_n)=0} x_1^{\overline{b_1}} \vee x_2^{\overline{b_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{b_n}}. \quad (2)$$

Такое представление единственно с точностью до перестановки дизъюнктов.

Определение

Представление 2 называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)** для функции f .

Рассмотрим ненулевую функцию $\bar{f}$ и построим ее СДНФ:

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\bar{f}(b_1, \dots, b_n)=1} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}.$$

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим ненулевую функцию $\bar{f}$ и построим ее СДНФ:

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\bar{f}(b_1, \dots, b_n)=1} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}.$$

Так как $f = \bar{\bar{f}}$, то

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{\bigvee_{f(b_1, \dots, b_n)=0} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} =$$

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим ненулевую функцию $\bar{f}$ и построим ее СДНФ:

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\bar{f}(b_1, \dots, b_n)=1} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}.$$

Так как $f = \bar{\bar{f}}$, то

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \overline{\bigvee_{f(b_1, \dots, b_n)=0} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} = \\ &= \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} \overline{x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} = \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим ненулевую функцию $\bar{f}$ и построим ее СДНФ:

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\bar{f}(b_1, \dots, b_n)=1} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}.$$

Так как $f = \bar{\bar{f}}$, то

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \overline{\bigvee_{f(b_1, \dots, b_n)=0} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} = \\ &= \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} \overline{x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} = \\ &= \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} \overline{x_1^{b_1}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{b_n}} = \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} x_1^{\bar{b}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{b}_n} \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим ненулевую функцию $\bar{f}$ и построим ее СДНФ:

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\bar{f}(b_1, \dots, b_n)=1} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}.$$

Так как $f = \bar{\bar{f}}$, то

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \overline{\bigvee_{f(b_1, \dots, b_n)=0} x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} = \\ &= \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} \overline{x_1^{b_1} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n}} = \\ &= \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} \overline{x_1^{b_1}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{b_n}} = \bigwedge_{f(b_1, \dots, b_n)=0} x_1^{\bar{b}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{b}_n} \end{aligned}$$

Единственность СКНФ следует из единственности СДНФ для $\bar{f}$.

x	y	z	f
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

Пример

x	y	z	f	СДНФ
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
1	0	0	0	
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$
0	0	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример

x	y	z	f	СДНФ
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
1	0	0	0	
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$
0	0	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$
0	1	1	0	
1	1	1	0	

СДНФ: $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$

Пример

x	y	z	f	СДНФ	СДНФ для $\bar{f}$
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
1	0	0	0		$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0		$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$
1	1	0	0		$x \wedge y \wedge \bar{z}$
1	0	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
0	1	1	0		$\bar{x} \wedge y \wedge z$
1	1	1	0		$x \wedge y \wedge z$

Пример

x	y	z	f	СДНФ	СДНФ для $\bar{f}$
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
1	0	0	0		$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0		$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$
1	1	0	0		$x \wedge y \wedge \bar{z}$
1	0	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
0	1	1	0		$\bar{x} \wedge y \wedge z$
1	1	1	0		$x \wedge y \wedge z$

СКНФ: $(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$

Определение

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Определение

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Найдем ДНФ и КНФ для функции $\overline{(x \rightarrow y)} \rightarrow z$.

Определение

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Найдем ДНФ и КНФ для функции $\overline{(x \rightarrow y) \rightarrow z}$.

Сначала избавимся от импликации: $\overline{\overline{x \vee y} \vee z}$.

Определение

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Найдем ДНФ и КНФ для функции $\overline{(x \rightarrow y) \rightarrow z}$.

Сначала избавимся от импликации: $\overline{\overline{x \vee y} \vee z}$.

Применим тождества, аналогичные законам Де Моргана, чтобы избавиться от отрицания: $(\overline{x} \vee y) \wedge \overline{z}$. Получили КНФ.

Определение

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Найдем ДНФ и КНФ для функции $\overline{(x \rightarrow y) \rightarrow z}$.

Сначала избавимся от импликации: $\overline{\overline{x \vee y} \vee z}$.

Применим тождества, аналогичные законам Де Моргана, чтобы избавиться от отрицания: $(\overline{x} \vee y) \wedge \overline{z}$. Получили КНФ.

Чтобы получить ДНФ применим тождество дистрибутивности:

$$(\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge \overline{z})$$

Определение

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Найдем ДНФ и КНФ для функции $\overline{(x \rightarrow y) \rightarrow z}$.

Сначала избавимся от импликации: $\overline{\overline{x \vee y} \vee z}$.

Применим тождества, аналогичные законам Де Моргана, чтобы избавиться от отрицания: $(\bar{x} \vee y) \wedge \bar{z}$. Получили КНФ.

Чтобы получить ДНФ применим тождество дистрибутивности:

$$(\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge \bar{z})$$

Функция $x \vee y$ является одновременно КНФ и ДНФ.

Определение

Многочленом Жегалкина называется многочлен от многих переменных с коэффициентами 0 или 1, где умножением является конъюнкция, а сложением — сложение по модулю 2.

Определение

Многочленом Жегалкина называется многочлен от многих переменных с коэффициентами 0 или 1, где умножением является конъюнкция, а сложением — сложение по модулю 2.

Заметим, что

- $x \cdot x = x$;
- $x + x = 0$;
- $(x + y)z = xz + yz$.

Определение

Многочленом Жегалкина называется многочлен от многих переменных с коэффициентами 0 или 1, где умножением является конъюнкция, а сложением — сложение по модулю 2.

Заметим, что

- $x \cdot x = x$;
- $x + x = 0$;
- $(x + y)z = xz + yz$.

Поэтому многочлен Жегалкина, например, от трех переменных имеет общий вид

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3.$$

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Если f тождественно равна нулю, то ее многочлен Жегалкина равен 0. Иначе рассмотрим ее СДНФ. Заметим, что

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Если f тождественно равна нулю, то ее многочлен Жегалкина равен 0. Иначе рассмотрим ее СДНФ. Заметим, что

- $\bar{x} = x + 1;$

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Если f тождественно равна нулю, то ее многочлен Жегалкина равен 0. Иначе рассмотрим ее СДНФ. Заметим, что

- $\bar{x} = x + 1$;
- $x \vee y = x + y + xy$.

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Если f тождественно равна нулю, то ее многочлен Жегалкина равен 0. Иначе рассмотрим ее СДНФ. Заметим, что

- $\bar{x} = x + 1$;
- $x \vee y = x + y + xy$.

Заменим отрицание и дизъюнкцию по этим тождествам и приведем подобные, получим многочлен Жегалкина.

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Если f тождественно равна нулю, то ее многочлен Жегалкина равен 0. Иначе рассмотрим ее СДНФ. Заметим, что

- $\bar{x} = x + 1$;
- $x \vee y = x + y + xy$.

Заменим отрицание и дизъюнкцию по этим тождествам и приведем подобные, получим многочлен Жегалкина.

Найдем количество многочленов Жегалкина от n переменных.

Заметим, что каждый одночлен можно представить в виде $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, где $a_i = 0$, если переменная не входит в этот одночлен, и $a_i = 1$, если входит. Тогда различных одночленов 2^n .

Многочлен Жегалкина для булевых функций

Теорема 3

Любую булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина единственным образом.

Если f тождественно равна нулю, то ее многочлен Жегалкина равен 0. Иначе рассмотрим ее СДНФ. Заметим, что

- $\bar{x} = x + 1$;
- $x \vee y = x + y + xy$.

Заменим отрицание и дизъюнкцию по этим тождествам и приведем подобные, получим многочлен Жегалкина.

Найдем количество многочленов Жегалкина от n переменных.

Заметим, что каждый одночлен можно представить в виде $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, где $a_i = 0$, если переменная не входит в этот одночлен, и $a_i = 1$, если входит. Тогда различных одночленов 2^n .

Каждый многочлен — это сумма одночленов. Можно считать, что это сумма всех 2^n одночленов с коэффициентами 0 или 1. Тогда всего таких различных сумм может быть 2^{2^n} , что совпадает с числом всех булевых функций от n переменных.

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	
1	0	0	0	
0	1	0	1	
0	0	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	
0	1	0	1	
0	0	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	
0	0	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	$a_0 + a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 1$
1	1	0	0	
1	0	1	1	
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	$a_0 + a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 1$
1	1	0	0	$a_0 + a_{100} + a_{010} + a_{110} = 0 \Rightarrow a_{110} = 0$
1	0	1	1	
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	$a_0 + a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 1$
1	1	0	0	$a_0 + a_{100} + a_{010} + a_{110} = 0 \Rightarrow a_{110} = 0$
1	0	1	1	$a_0 + a_{100} + a_{001} + a_{101} = 1 \Rightarrow a_{101} = 0$
0	1	1	0	
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	$a_0 + a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 1$
1	1	0	0	$a_0 + a_{100} + a_{010} + a_{110} = 0 \Rightarrow a_{110} = 0$
1	0	1	1	$a_0 + a_{100} + a_{001} + a_{101} = 1 \Rightarrow a_{101} = 0$
0	1	1	0	$a_0 + a_{010} + a_{001} + a_{011} = 0 \Rightarrow a_{011} = 0$
1	1	1	0	

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	$a_0 + a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 1$
1	1	0	0	$a_0 + a_{100} + a_{010} + a_{110} = 0 \Rightarrow a_{110} = 0$
1	0	1	1	$a_0 + a_{100} + a_{001} + a_{101} = 1 \Rightarrow a_{101} = 0$
0	1	1	0	$a_0 + a_{010} + a_{001} + a_{011} = 0 \Rightarrow a_{011} = 0$
1	1	1	0	$a_{111} = 1$

Пример построения многочлена Жегалкина

$$a_0 + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{011}x_2x_3 + a_{111}x_1x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
1	0	0	0	$a_0 + a_{100} = 0 \Rightarrow a_{100} = 1$
0	1	0	1	$a_0 + a_{010} = 1 \Rightarrow a_{010} = 0$
0	0	1	0	$a_0 + a_{001} = 0 \Rightarrow a_{001} = 1$
1	1	0	0	$a_0 + a_{100} + a_{010} + a_{110} = 0 \Rightarrow a_{110} = 0$
1	0	1	1	$a_0 + a_{100} + a_{001} + a_{101} = 1 \Rightarrow a_{101} = 0$
0	1	1	0	$a_0 + a_{010} + a_{001} + a_{011} = 0 \Rightarrow a_{011} = 0$
1	1	1	0	$a_{111} = 1$

$$f = 1 + x_1 + x_3 + x_1x_2x_3$$