Справочные материалы по математике

Тригонометрические формулы

Основное тригонометрическое тождество

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Формулы суммы и разности

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат разности $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Разность квадратов $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Куб суммы $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Куб разности $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Сумма кубов $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Разность кубов $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Дифференцирование и интегрирование

Таблица производных

$C' = 0$

$x' = 1$

$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(e^x\right)' = e^x$

$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

$\left(\sin x\right)' = \cos x$

$\left(\cos x\right)' = -\sin x$

$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Таблица интегралов

$\int dx = x + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

Ряды

Степенные ряды основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ ;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n};\ x \in (-1;1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots;\ x \in (-1;1).$$

Прочие формулы

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1,\ \ b_2,\ \ \ldots,\ \ b_n, \ldots$ со знаменателем q, где $|q| < 1$, вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Сумма n членов геометрической прогрессии $b_1,\ \ b_2,\ \ \ldots,\ \ b_n, \ldots$ со знаменателем q, где $q \neq 1$, вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Формулы тригонометрии

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

Двойные углы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Синус суммы, косинус разности...

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta}$$

Сумма синусов, разность косинусов...

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Преобразование произведения в сумму

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

Универсальная тригонометрическая замена

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Тройные углы

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$ $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{ctg}\,a$ $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{tg}\,a$	$\sin(\pi+a)=-\sin a$ $\cos(\pi+a)=-\cos a$ $\mathrm{tg}\,(\pi+a)=\mathrm{tg}\,a$ $\mathrm{ctg}\,(\pi+a)=\mathrm{ctg}\,a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a$ $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{ctg}\,a$ $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{tg}\,a$	$\sin(2\pi+a)=\sin a$ $\cos(2\pi+a)=\cos a$ $\mathrm{tg}\,(2\pi+a)=\mathrm{tg}\,a$ $\mathrm{ctg}\,(2\pi+a)=\mathrm{ctg}\,a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$ $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\mathrm{ctg}\,a$ $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\mathrm{tg}\,a$	$\sin(\pi-a)=\sin a$ $\cos(\pi-a)=-\cos a$ $\mathrm{tg}\,(\pi-a)=-\mathrm{tg}\,a$ $\mathrm{ctg}\,(\pi-a)=-\mathrm{ctg}\,a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a$ $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\mathrm{ctg}\,a$ $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\mathrm{tg}\,a$	$\sin(2\pi-a)=-\sin a$ $\cos(2\pi-a)=\cos a$ $\mathrm{tg}\,(2\pi-a)=-\mathrm{tg}\,a$ $\mathrm{ctg}\,(2\pi-a)=-\mathrm{ctg}\,a$