§ 16. Ранг матрицы по минорам

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Минором матрицы A называется определитель квадратной матрицы, стоящей на пересечении некоторых строк и столбцов этой матрицы. *Порядком* минора называется порядок той матрицы, определителем которой этот минор является.

Если $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$, то всякий ее минор есть определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

где $k \leqslant \min\{m, n\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant n$. Порядок указанного минора равен k.

Минор матрицы (комментарии)

- Одна и та же матрица может иметь много различных миноров одного и того же порядка.
- Всякий элемент произвольной матрицы A является ее минором 1-го порядка. В частности, если $A \neq O$, то в A есть ненулевые миноры.
- Определитель квадратной матрицы порядка n является ее (единственным) минором n-го порядка.
- Введенное в § 8 понятие минора элемента квадратной матрицы является частным случаем введенного на предыдущем слайде понятия минора матрицы: если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, а $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то минор M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A является минором $(n-1)$-го порядка этой матрицы.

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Если $A \neq O$, то *рангом матрицы* A *по минорам* называется наибольший из порядков ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по минорам по определению равен 0. Ранг матрицы A по минорам обозначается через $r_m(A)$.

В дальнейшем будут определены еще две разновидности понятия ранга матрицы (ранги матрицы по строкам и по столбцам).

Ранг по минорам и элементарные преобразования матрицы (1)

Введем для удобства следующее определение.

Определение

Умножение строки матрицы на ненулевой скаляр, прибавление одной строки к другой и перестановку строк будем называть *основными элементарными преобразованиями* матрицы.

Лемма 16.1

Основные элементарные преобразования матрицы над полем не меняют ее ранга по минорам.

Доказательство. Пусть A — произвольная матрица над полем, а B — матрица, полученная из A с помощью одного из трех основных элементарных преобразований. Пусть M — произвольный минор матрицы A. Матрицу, определителем которой является минор M, будем обозначать через A_M. Если матрица A_M расположена в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$ матрицы A, то определитель матрицы, расположенной в строках и столбцах матрицы B с теми же номерами, обозначим через M'. Ясно, что M' — минор матрицы B, и порядки миноров M и M' совпадают. Рассмотрим три случая.

Случай 1: B получена из A умножением i-й строки матрицы A на ненулевой скаляр t. Пусть M — произвольный минор матрицы A. Если матрица A_M не содержит элементов i-й строки матрицы A, то $M' = M$. В противном случае 2-е свойство определителей влечет, что $M' = tM$. Учитывая, что $t \neq 0$, получаем, что $M = 0$ тогда и только тогда, когда $M' = 0$. Следовательно, максимальные порядки ненулевых миноров в матрицах A и B совпадают, и потому $r_m(A) = r_m(B)$.

Случай 2: B получена из A прибавлением j-й строки матрицы A к ее i-й строке. Пусть M — ненулевой минор k-го порядка матрицы A. Покажем, что в матрице B тоже есть ненулевой минор k-го порядка. Если матрица A_M не содержит элементов i-й строки матрицы A, то $M' = M \neq 0$. Если A_M содержит элементы как i-й, так и j-й строки матрицы A, то, в силу 7-го свойства определителей, вновь получаем, что $M' = M \neq 0$. Предположим, наконец, что A_M содержит элементы i-й строки матрицы A, но не содержит элементов ее j-й строки. Если $M' \neq 0$, то нужный нам факт установлен. Пусть теперь $M' = 0$. Будем для простоты предполагать, что матрица A_M расположена в первых k строках и первых k столбцах матрицы A, $i = 1$ и $j = k + 1$ (в общем случае доказательство вполне аналогично).

Используя 6-е свойство определителей, мы получаем, что

$$M' = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{k+1\,1} & a_{12} + a_{k+1\,2} & \dots & a_{1k} + a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} =$$

$$= M + \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Обозначим последний из определителей, возникших в этой цепочке равенств, через D. Поскольку $M + D = M' = 0$, имеем

$$D = \begin{vmatrix} a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = -M \neq 0. \qquad (1)$$

Ранг по минорам и элементарные преобразования матрицы (4)

В матрице, определитель которой мы обозначили через D, поменяем местами сначала первую и вторую строки, затем вторую и третью строки, ..., наконец, $(k-1)$-ю и k-ю строки. В результате, сделав $k-1$ перестановку строк, мы получим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель является минором k-го порядка матрицы B (матрица, определителем которой он является, расположена в первых k столбцах и в строках со второй по $(k+1)$-ю матрицы B). Обозначим этот минор через D'. Равенство (1) и 4-е свойство определителей влекут, что $D' = (-1)^{k-1}D = (-1)^k M \neq 0$. Таким образом, матрица B содержит ненулевой минор порядка k.

Итак, если матрица A содержит ненулевой минор k-го порядка, то тем же свойством обладает и матрица B. Следовательно, максимальный порядок ненулевого минора матрицы B не может быть меньше, чем максимальный порядок ненулевого минора матрицы A. Иными словами, $r_m(A) \leqslant r_m(B)$.

Чтобы доказать противоположное неравенство, заметим, что матрица A может быть получена из матрицы B последовательным выполнением трех элементарных преобразований: умножением j-й строки матрицы B на -1, прибавлением j-й строки полученной матрицы к ее i-й строке и повторным умножением j-й строки полученной после этого матрицы на -1. Первая и третья из этих операций, как было установлено при разборе случая 1), не меняют ранга матрицы по минорам, а вторая, как мы только что убедились, может разве лишь увеличить его. Следовательно, $r_m(B) \leqslant r_m(A)$ и потому $r_m(A) = r_m(B)$.

Случай 3: B получена из A перестановкой строк. В силу 4-го свойства определителей всякий минор матрицы B с точностью до знака равен некоторому минору матрицы A. Отсюда с очевидностью вытекает, что максимальные порядки ненулевых миноров у матриц A и B совпадают. $\square$

Ранг ступенчатой матрицы по минорам (1)

Лемма 16.2

Ранг по минорам ступенчатой матрицы над полем равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Предположим, что $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица над полем, число ненулевых строк которой равно k. Очевидно, что любой минор более чем k-го порядка матрицы A (если он существует, т. е. если A содержит более k строк и более k столбцов) является определителем матрицы, которая содержит нулевую строку, и потому равен 0 по 3-му свойство определителей. Следовательно, $r_m(A) \leqslant k$. Для завершения доказательства достаточно установить, что матрица A имеет ненулевой минор порядка k.

Ранг ступенчатой матрицы по минорам (2)

Матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1i_1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & a_{2i_2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & a_{ki_k} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ki_k} \neq 0$. Матрица, расположенная в первых k строках матрицы A и столбцах этой матрицы с номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k, является верхнетреугольной, и все элементы на ее главной диагонали отличны от 0. Следовательно, определитель этой матрицы, являющийся минором k-го порядка матрицы A, отличен от 0. $\square$

Из лемм 16.1 и 16.2 вытекает способ нахождения ранга матрицы по минорам: надо привести матрицу к ступенчатому виду и посмотреть, сколько в полученной маьрице имеется ненулевых строк. Кроме того, из лемм 16.1 и 16.2 вытекает следующее утверждение, которое дает ответ на вопрос, сформулированный в § 7 после замечания 7.2.

Следствие 16.1

Если данную матрицу над полем различными способами приводить к ступенчатому виду, то все полученные при этом ступенчатые матрицы будут иметь одно и то же число ненулевых строк. □