§ 15. Обратная матрица

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение обратной матрицы

Определение

Пусть A — произвольная матрица. Матрица B называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$, где E — единичная матрица. Если матрица, обратная к A, существует, то матрица A называется *обратимой*. Матрица, обратная к A, обозначается через A^{-1}.

В определении ничего не говорится о размерах матрицы A и обратной к ней матрицы.

Замечание 15.1

Если матрица A обратима, то она является квадратной матрицей, а обратная к ней матрица является квадратной матрицей того же порядка, что и A.

Доказательство. Обозначим матрицу, обратную к A, через B. Пусть $A \in R^{m\times n}$, а $B \in R^{r\times s}$. Из существования произведения AB вытекает, что $n = r$, а из существования произведения BA — что $m = s$. Но тогда $AB \in R^{m\times m}$, а $BA \in R^{n\times n}$. Поскольку $AB = E = BA$, получаем, что $m = n$. Таким образом, A и B — квадратные матрицы порядка n. $\square$

Критерий обратимости матрицы (1)

Теорема 15.1

Пусть A — квадратная матрица.

1) (*критерий обратимости матрицы*) *Матрица, обратная к A, существует тогда и только тогда, когда матрица A невырожденна.*
2) *Если матрица A невырожденна, то матрица, обратная к A, единственна и может быть вычислена по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top}. \tag{1}$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Предположим, что $|A| = 0$ и существует матрица B, обратная к A. Тогда $|AB| = |A| \cdot |B| = 0$ по теореме 8.1. С другой стороны, из определения обратной матрицы вытекает, что $|AB| = |E| = 1$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Предположим, что матрица A невырожденна. Положим $B = \frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top}$. Докажем, что матрица B обратна к A. В самом деле, используя замечание 14.1, получаем, что

$$AB = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top}\right) = \frac{1}{|A|} \cdot (A \cdot (A^{\vee})^{\top}) = \frac{1}{|A|} \cdot |A| \cdot E = E,$$

и, аналогично, $BA = E$. Итак, матрица B обратна к A. Тем самым мы завершили доказательство п. 1).

2) Единственность обратной матрицы в специальной проверке не нуждается, так как вытекает из леммы 4.1, а тот факт, что матрица $\frac{1}{|A|} \cdot (A^{\vee})^{\top}$ обратна к A, доказан выше. □

Из сказанного выше вытекает, что

- совокупность всех невырожденных квадратных матриц одного и того же порядка n над некоторым полем с операцией умножения матриц образует группу. Нейтральным элементом этой группы является единичная матрица порядка n.

Замечание об определении обратной матрицы

Матрица B, обратная к A, должна удовлетворять двум равенствам: $AB = E$ и $BA = E$. Следующее утверждение показывает, однако, что на практике достаточно проверять одно из них.

Замечание 15.2

Пусть A — квадратная матрица, а матрица B такова, что $AB = E$. Тогда матрица A обратима и $B = A^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 8.1 $|A| \cdot |B| = |AB| = |E| = 1$. В частности, отсюда следует, что $|A| \neq 0$. Из теоремы 15.1 теперь вытекает, что матрица A обратима. Умножая обе части равенства $AB = E$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1}(AB) = A^{-1}E$. Но $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$, а $A^{-1}E = A^{-1}$. Таким образом, $B = A^{-1}$. $\square$

Свойства обратной матрицы

Свойства обратной матрицы

Если A и B — невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка над полем F, $t \in F$ и $t \neq 0$, то:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) $(tA)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot A^{-1}$;
4) $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$;
5) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Доказательство. Свойства 1) и 2) являются частными случаями общих свойств обратных элементов, указанных в курсе «Ведение в специальность». Свойство 3) вытекает из замечания 15.2 и того, что

$$(tA) \cdot \left(\frac{1}{t} \cdot A^{-1}\right) = \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot (AA^{-1}) = 1 \cdot E = E.$$

Свойство 4) легко вытекает из формулы (1) и 1-го свойства определителей. Используя теорему 8.1, имеем $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$. Это доказывает свойство 5). $\square$

Полная линейная группа

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(F)$ множество всех невырожденных квадратных матриц порядка n над полем F. Из теоремы 8.1 вытекает, что это множество замкнуто относительно умножения матриц. Если $A \in \mathbf{GL}_n(F)$, то, в силу критерия обратимости матрицы, существует матрица, обратная к A, а из свойства 5) произведения матриц вытекает, что $A^{-1} \in \mathbf{GL}_n(F)$. Таким образом, множество $\mathbf{GL}_n(F)$ с операцией умножения матриц является группой, которая называется *полной линейной* или *общей линейной* группой матриц порядка n над полем F. Это еще один пример естественно возникающей в нашем курсе неабелевой группы (наряду с симметрической группой $\mathbf{S}_n$).

Один из способов вычисления обратной матрицы дает формула (1). Эту формулу удобно применять при $n = 2$: легко проверяется, что в этом случае она принимает следующий простой вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Но при больших n этот способ требует выполнения большого объема вычислений, который к тому же очень быстро растет с ростом порядка матрицы: если матрица A имеет порядок n, то необходимо сосчитать один определитель n-го порядка и n^2 определителей $(n-1)$-го порядка. На следующем слайде будет указан менее трудоемкий способ нахождения обратной матрицы. При этом способе не требуется вычислять ни одного определителя, а с ростом n объем необходимых вычислений растет медленно.

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Матрица, обратная к матрице A, есть не что иное, как решение уравнения $AX = E$, где A — невырожденная квадратная матрица. Из алгоритма 7.1 вытекает

Алгоритм 15.1 (алгоритм нахождения обратной матрицы)

Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n. Запишем матрицу $(A \mid E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1}.

Обратная матрица, системы линейных уравнений и матричные уравнения

Рассмотрим матричное уравнение вида $AX = B$, где A — невырожденная квадратная матрица. Умножив обе его части слева на матрицу A^{-1} (существующую в силу критерия обратимости матрицы), получим слева $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, а справа — $A^{-1}B$. Таким образом, рассматриваемое уравнение решается по формуле $X = A^{-1}B$. Аналогично проверяется, что уравнение вида $XA = B$, где A — невырожденная квадратная матрица, решается по формуле $X = BA^{-1}$, а уравнение вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы, — по формуле $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Особый интерес представляет первое из рассмотренных в предыдущем абзаце уравнений, т. е. уравнение $AX = B$, в случае, когда B (а значит и X) — матрица, состоящая из одного столбца. Как мы знаем, в этом случае $AX = B$ — это матричная запись системы линейных уравнений с основной матрицей A. Тот факт, что матрица A квадратна, означает, что эта система является крамеровской. Если $|A| \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение. В силу сказанного выше, это решение может быть найдено по формуле $X = A^{-1}B$.