§ 13. Рациональные дроби

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

В этом параграфе мы применяем результат о разложимости произвольного многочлена в произведение неприводимых множителей для изучения некоторого обобщения понятия многочлена.

Определение

Рациональной дробью над полем F называется функция вида $\frac{f}{g}$, где $f, g \in F[x]$ и $g \neq o$.

Очевидно, что произвольный многочлен f является рациональной дробью вида $\frac{f}{1}$.

Определения

Рациональная дробь $\frac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$.
Рациональная дробь $\frac{f}{g}$ называется *простейшей*, если существуют многочлен p, неприводимый над полем F, и натуральное число n такие, что $g = p^n$ и $\deg f < \deg p$.

Очевидно, что всякая простейшая дробь является правильной.

Замечание 13.1

Любая рациональная дробь над произвольным полем может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Доказательство. Пусть $\frac{f}{g}$ — рациональная дробь. Разделим f на g с остатком: $f = qg + r$ для некоторых многочленов q и r, причем $\deg r < \deg g$. Тогда

$$\frac{f}{g} = \frac{qg + r}{g} = q + \frac{r}{g},$$

причем дробь $\frac{r}{g}$ является правильной. Представление дроби $\frac{f}{g}$ в виде суммы многочлена q и правильной дроби $\frac{r}{g}$ единственно ввиду единственности частного q и остатка r. □

Основной результат: формулировка

Основным результатом параграфа является следующее утверждение.

Теорема 13.1

Любая правильная рациональная дробь над произвольным полем может быть представлена, причем единственным образом, в виде суммы простейших дробей.

- Возможность представить правильную рациональную дробь над полем $\mathbb{R}$ в виде суммы простейших дробей играет важную роль в курсе математического анализа.

Доказательство. *Существование.* Пусть $\frac{f}{g}$ — правильная рациональная дробь. Без ограничения общности можно считать, что $\ell c(g) = 1$ (в противном случае можно разделить каждый из многочленов f и g на $\ell c(g)$). Пусть $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ — разложение многочлена g на неприводимые множители. Доказательство того, что дробь $\frac{f}{g}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей, разобьем на два шага. На первом шаге мы докажем, что дробь $\frac{f}{g}$ может быть представлена как сумма правильных рациональных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена. На втором шаге будет доказано, что правильную рациональную дробь, у которой знаменатель есть степень неприводимого многочлена, можно представить как сумму простейших дробей.

Шаг 1. Докажем индукцией по n, что

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{f_n}{p_n^{k_n}} \qquad (1)$$

для некоторых многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ таких, что $\deg f_i < \deg p_i^{k_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

База индукции очевидна: если $n = 1$, то равенство (1) выполнено при $f_1 = f$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. В силу следствия 10.1 существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:

$$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2.$$

Положим $f_1 = qg_1 + fv$. Тогда $f = rg_1 + f_1 g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1 g_2 + rg_1}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{r}{g_2}.$$

Напомним, что $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ и $\deg r < \deg g_2$. Это позволяет применить к дроби $\frac{r}{g_2}$ предположение индукции и заключить, что

$$\frac{r}{g_2} = \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{f_n}{p_n^{k_n}}$$

для некоторых многочленов $f_2, \ldots, f_n$ таких, что $\deg f_i < \deg p_i^{k_i}$ для всех $i = 2, \ldots, n$. Для того чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что $\deg f_1 < \deg g_1$. Ясно, что это эквивалентно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$, которое мы и докажем. Учитывая, что $f - rg_1 = f_1 g_2$, получаем, что

$$\deg f_1 + \deg g_2 = \deg(f_1 g_2) = \deg(f - rg_1) \leqslant \max\{\deg f, \deg(rg_1)\}.$$

Поскольку $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$, получаем, что

$$\deg f_1 + \deg g_2 \leqslant \max\{\deg f, \deg(rg_1)\} < \deg g_1 + \deg g_2.$$

Шаг 2. Осталось доказать, что каждое из слагаемых, стоящих в правой части равенства (1), представимо в виде суммы простейших дробей. Иными словами, требуется доказать, что в таком виде представима всякая рациональная дробь вида $\frac{h}{w^k}$, где w — неприводимый многочлен и $\deg h < \deg w^k$. Проведем доказательство индукцией по k.

База индукции очевидна: если $k = 1$, то $\deg h < \deg w$ и дробь $\frac{h}{w^k} = \frac{h}{w}$ является простейшей.

Шаг индукции. Пусть теперь $k > 1$. Разделим h на w с остатком: $h = qw + r$, где $\deg r < \deg w$. Тогда

$$\frac{h}{w^k} = \frac{qw + r}{w^k} = \frac{q}{w^{k-1}} + \frac{r}{w^k}.$$

Дробь $\frac{r}{w^k}$ является простейшей, поскольку $\deg r < \deg w$. Осталось доказать, что дробь $\frac{q}{w^{k-1}}$ представима в виде суммы простейших дробей. По предположению индукции для этого достаточно убедиться в том, что эта дробь является правильной. В самом деле, поскольку $\deg r < \deg w \leqslant \deg qw$, из равенства $h = qw + r$ вытекает, что $\deg h = \deg qw$. Следовательно, $\deg qw = \deg h < \deg w^k$. Иными словами, $\deg q + \deg w < k \deg w$, откуда $\deg q < (k-1) \deg w = \deg w^{k-1}$. Мы доказали, что дробь $\frac{q}{w^{k-1}}$ является правильной.

Единственность. Предположим, что дробь $\frac{f}{g}$ двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{f}{g} = \frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \cdots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} \quad \text{и} \quad \frac{f}{g} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \cdots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}$$

(имеется в виду, что в правых частях каждого из этих равенств все знаменатели попарно различны, но некоторые из многочленов $p_1, \ldots, p_m$, равно как и некоторые из многочленов $q_1, \ldots, q_n$ могут совпадать). Разумеется, все слагаемые в правых частях двух последних равенств можно считать ненулевыми. Тогда

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \cdots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \cdots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}. \tag{2}$$

Если левая и правая части равенства (2) содержат одно и то же слагаемое, вычеркнем его из обеих частей равенства. Проделаем это для всех пар одинаковых слагаемых. Если после этого получится равенство $0 = 0$, значит исходно мы имели два совпадающих разложения дроби $\frac{f}{g}$ в сумму простейших дробей. В этом случае доказательство завершено. Предположим, что в результате описанного выше процесса в равенстве (2) будут вычеркнуты не все слагаемые.

Перенеся все оставшиеся в правой части равенства слагаемые в левую часть с обратным знаком и изменив обозначения, мы получим равенство вида

$$\frac{s_1}{t_1} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0. \tag{3}$$

Все слагаемые в левой части этого равенства являются простейшими дробями. В частности, $t_1 = p^k$ для некоторого неприводимого многочлена p и некоторого числа k. Если $r = 1$, то единственное слагаемое в левой части равенства (3), совпадающее, с точностью до знака, с одним из слагаемых равенства (2), равно нулю. Но это противоречит нашей договоренности о том, что все слагаемые в обеих частях равенства (2) являются ненулевыми. Следовательно, $r > 1$.

Без ограничения общности можно считать, что k — это наибольшая из степеней, в которых многочлен p входит в знаменатели дробей $\frac{s_1}{t_1}, \ldots, \frac{s_r}{t_r}$ (если это не так, то слагаемые в левой части равенства (3) можно поменять местами). Иными словами, для всякого $i = 2, \ldots, r$, либо $t_i = p^m$, где $m < k$, либо t_i имеет вид q^ℓ, где q — неприводимый многочлен, отличный от p. Обозначим через Q общий знаменатель всех дробей, стоящих в левой части равенства (3), у которых знаменатель имеет второй из указанных только что видов.

Доказательство основного результата (7)

Из п. 3) предложения 10.1 вытекает, что многочлены p и Q взаимно просты. Умножим обе части равенства (3) на $p^{k-1}Q$. Получим равенство вида $\frac{s_1 Q}{p} + R = 0$, где R — некоторый многочлен. Следовательно, $s_1 Q = -pR$. Таким образом, $p \mid (s_1 Q)$. Поскольку p взаимно прост с Q, из п. 2) предложения 10.1 вытекает, что $p \mid s_1$. Но это невозможно, так как дробь $\frac{s_1}{p^k}$ является простейшей, и потому $\deg s_1 < \deg p$. $\square$