§ 9. Крамеровские системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение крамеровской системы

Определение

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если в ней число уравнений равно числу неизвестных.

Крамеровские системы получили название в честь швейцарского математика XVIII века Габриэля Крамера, который изучал их.

Поскольку, как мы увидим ниже, исследование крамеровских систем линейных уравнений неразрывно связано с рассмотрением определителей, *всюду далее в данном пособии, за исключением тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, при рассмотрении крамеровских систем линейных уравнений предполагается, что речь идет о системах уравнений над полем, характеристика которого отлична от* 2.

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Определитель основной матрицы системы (1) обозначим через Δ и будем называть *определителем системы* (1). Далее, для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ обозначим через Δ_i определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца основной матрицы системы (1) на столбец свободных членов этой системы. Иными словами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 9.1 (теорема Крамера)

Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Эту теорему часто называют также *правилом Крамера*.

Доказательство. Пусть $\Delta \neq 0$. Докажем сначала *существование* решения системы (1). Для этого достаточно убедиться в том, что набор скаляров

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \tag{2}$$

является решением системы, т. е. обращает все ее уравнения в верные равенства. Подставим этот набор в левую часть первого уравнения системы. Получим выражение

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} + \cdots + a_{1n} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Разложим в этом выражении определитель Δ_1 по первому столбцу, определитель Δ_2 — по второму столбцу, ..., определитель Δ_n — по n-му столбцу. Получим:

$$\begin{aligned}
& a_{11}\cdot\tfrac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\cdot\tfrac{\Delta_2}{\Delta}+\cdots+a_{1n}\cdot\tfrac{\Delta_n}{\Delta}= \\
=&\tfrac{1}{\Delta}\cdot\left(a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\cdots+a_{1n}\Delta_n\right)= \\
=&\tfrac{1}{\Delta}\cdot\Big[\,a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1})+ \\
&\quad +a_{12}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2})+ \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad +a_{1n}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn})\Big].
\end{aligned}$$

Раскрыв круглые скобки и сгруппировав слагаемые, содержащие b_1, b_2, ..., b_n, можно переписать полученное выражение в виде

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\Delta}\cdot\Big[\, & b_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n})+ \\
+ & b_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n})+ \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & b_n(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn})\Big].
\end{aligned}$$

Выражение в первых круглых скобках есть не что иное, как разложение определителя Δ по первой строке, а выражения в остальных круглых скобках равны нулю в силу 9-го свойства определителей.

Поэтому окончательно получаем, что

$$a_{11}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\cdot\frac{\Delta_2}{\Delta}+\cdots+a_{1n}\cdot\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\cdot b_1\cdot\Delta=b_1,$$

т. е. набор скаляров (2) обращает первое уравнение системы (1) в верное равенство. Аналогично проверяется, что он обращает в верные равенства и все остальные уравнения этой системы.

Докажем теперь *единственность* решения. Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — произвольное решение системы (1). Иными словами, этот набор скаляров обращает все уравнения системы в верные равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \cdots + a_{1n}x_n^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \cdots + a_{2n}x_n^0 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \cdots + a_{nn}x_n^0 = b_n. \end{cases}$$

Умножим первое из этих равенств на A_{11}, второе — на A_{21}, …, последнее — на A_{n1} и сложим полученные равенства.

Получим равенство

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \cdots + a_{1n}x_n^0)A_{11} + \\ &+ (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \cdots + a_{2n}x_n^0)A_{21} + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \cdots + a_{nn}x_n^0)A_{n1} = \\ &= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.\end{aligned}$$

Сгруппировав в левой части равенства слагаемые, содержащие $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, получим:

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1^0 + \\ &+ (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2^0 + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n^0 = \\ &= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.\end{aligned}$$

В левой части этого равенства выражение в первых круглых скобках есть в точности разложение определителя Δ по первому столбцу, а выражения во всех остальных круглых скобках равны нулю в силу 9-го свойства определителей и принципа равноправия строк и столбцов. А в правой части стоит разложение определителя Δ_1 по первому столбцу. Следовательно, последнее равенство можно переписать в виде $\Delta x_1^0 = \Delta_1$. Аналогично доказывается, что $\Delta x_2^0 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n^0 = \Delta_n$.

Таким образом,

$$\begin{array}{l}\text{если } (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \text{ — решение системы (1),} \\ \text{то } \Delta x_1^0 = \Delta_1, \Delta x_2^0 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n^0 = \Delta_n.\end{array} \tag{3}$$

- Условие $\Delta \neq 0$ в доказательстве утверждения (3) не использовалось. Таким образом, *это утверждение справедливо при любом* Δ.

Поскольку $\Delta \neq 0$, получаем, что

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n^0 = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Итак, мы взяли произвольное решение и доказали, что оно совпадает с решением (2). Следовательно, решение единственно. Теорема Крамера доказана. □

Следствия из теоремы Крамера (1)

Укажем два следствия из теоремы Крамера. Из (3) непосредственно вытекает

Следствие 9.1

Если $\Delta = 0$, а по крайней мере один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ отличен от 0, то система (1) не имеет решений. □

Определение

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен 0, и *невырожденной*, если он не равен 0.

Следствие 9.2

Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица невырожденна.

Доказательство. *Достаточность* вытекает из теоремы Крамера.

Необходимость. Предположим, что $\Delta = 0$ и система (1) совместна. Надо проверить, что в этом случае система (1) является неопределенной. В силу п. 2) теоремы 6.1 достаточно проверить, что однородная система, соответствующая системе (1), неопределенна.

Следствия из теоремы Крамера (2)

Приведем основную матрицу этой системы к ступенчатому виду, не вычеркивая при этом нулевые строки (в случае их появления). Полученная ступенчатая матрица будет квадратной матрицей порядка n. Обозначим ее через B и положим $B = (b_{ij})$. Из 2-го и 4-го свойств определителей вытекает, что $|B| = k \cdot \Delta$ для некоторого $k \neq 0$, а значит $|B| = 0$.

Докажем, что последняя строка матрицы B является нулевой. Предположим, что это не так. В силу замечания 7.4 матрица B верхнетреугольна. Следовательно, $b_{nj} = 0$ для всех $j < n$, и потому $b_{nn} \neq 0$. Поскольку матрица B ступенчата, существует такой индекс $i < n$, что $b_{n-1\,i} \neq 0$. В то же время, $b_{n-1\,j} = 0$ для всякого $j < n-1$, поскольку матрица B верхнетреугольна. Следовательно, $i = n-1$, т.е. $b_{n-1\,n-1} \neq 0$. Аналогично проверяется, что все диагональные элементы матрицы B отличны от 0. В силу предложения 8.10 $|B| = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn} \neq 0$ вопреки сказанному выше.

Итак, последняя строка матрицы B — нулевая. Следовательно, число ненулевых строк матрицы B меньше n. В силу замечания 7.3 это означает, что система является неопределенной. $\square$

Следствия из теоремы Крамера (3)

Еще одно следствие из теоремы Крамера относится к крамеровским однородным системам.

Следствие 9.3

Крамеровская однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица вырожденна.

Доказательство. *Необходимость.* Если крамеровская однородная система имеет ненулевое решение, то она имеет более одного решения (так как нулевое решение у нее есть всегда). Но тогда $\Delta = 0$ в силу теоремы Крамера.

Достаточность. Пусть $\Delta = 0$. В силу следствия 9.2 наша система не может иметь единственного решения. Несовместной она тоже быть не может, поскольку любая однородная система совместна (см. замечание 6.1). Следовательно, наша система имеет более одного решения. Ясно, что все эти решения, кроме одного, — ненулевые. $\square$

Случай $\Delta = \Delta_1 = \cdots = \Delta_n = 0$

Теорема Крамера и следствия из нее ничего не говорят о случае, когда $\Delta = \Delta_1 = \cdots = \Delta_n = 0$. Поскольку при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение, а в случае, когда $\Delta = 0$, а по крайней мере один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ отличен от 0, система не имеет решений, может показаться логичным предположение, что при $\Delta = \Delta_1 = \cdots = \Delta_n = 0$ реализуется третья возможность: система имеет более одного решения (а в случае бесконечного поля — бесконечно много решений). Это, однако, не так: как показывает следующий пример, в обсуждаемом случае система может иметь более одного решения, но может и не иметь решений.

Пример 9.1

Рассмотрим две крамеровские системы линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}\right.$$

В каждой из них $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ (поскольку все эти определители содержат два одинаковых столбца), но первая система равносильна одному уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, и потому имеет более одного решения, а вторая, очевидно, несовместна.

Матричное уравнение вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы A (1)

В § 7 рассматривалось матричное уравнение вида

$$AX = B. \tag{4}$$

Теперь мы можем получить дополнительную информацию о нем в случае, когда матрица A является квадратной и невырожденной. Именно этот случай представляет особый интерес с точки зрения дальнейших приложений. Напомним, что если выполнено равенство (4), то матрицы X и B имеют одинаковое число столбцов. Обозначим это число через k. Тогда, как показано в § 7, уравнение (4) равносильно совокупности k систем линейных уравнений $AX_1 = B_1$, $AX_2 = B_2$, ..., $AX_k = B_k$, где, для всякого $i = 1, 2, \dots, k$, через X_i обозначен i-й столбец матрицы X, а через B_i — i-й столбец матрицы B. Если A — квадратная матрица, то каждая из этих систем является крамеровской. Если, к тому же, матрица A невырожденна, то, в силу теоремы Крамера, все эти системы имеют единственное решение. Следовательно, в этом случае и уравнение (4) имеет единственное решение. Это позволяет использовать для его решения метод Гаусса–Жордана.

Матричное уравнение вида $AX = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы A (2)

Объединяя алгоритмы 7.1 и 7.2, получаем следующий алгоритм, который будет использован в дальнейшем для решения ряда важных задач.

Алгоритм 9.1

Пусть дано уравнение (4), в котором A — невырожденная квадратная матрица порядка n, а B — матрица размера $n \times k$. Запишем матрицу $(A \mid B)$ размера $n \times (n + k)$ и с помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т. е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т. е. в последних k столбцах) полученной матрицы будет записана матрица X, являющаяся единственным решением уравнения (4).

Матричные уравнения вида $XA = B$ в случае невырожденной квадратной матрицы A и $AXB = C$ в случае невырожденных квадратных матриц A и B

После несложной модификации алгоритм 9.1 можно применять и для решения уравнений вида $XA = B$, где A — невырожденная квадратная матрица, и $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы. Первое из них равносильно уравнению $A^\top X^\top = B^\top$. В силу 1-го свойства определителей матрица $A^\top$ невырожденна. Поэтому, в силу алгоритма 9.1, после приведения к единичному виду левой части матрицы $(A^\top \mid B^\top)$, в правой части полученной матрицы будет стоять матрица $X^\top$, транспонировав которую мы найдем матрицу X. Наконец, второе из указанных выше уравнений равносильно уравнению $AY = C$, где $Y = XB$. Решив его с помощью алгоритма 9.1, мы найдем матрицу D, удовлетворяющую равенству $XB = D$. Перейдя от него к уравнению $B^\top X^\top = D^\top$, мы сможем с помощью алгоритма 9.1 найти матрицу $X^\top$, транспонировав которую получим матрицу X.