Глава II. Системы линейных уравнений

§ 6. Строение общего решения системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Система линейных уравнений

Определения

Линейным уравнением (или *уравнением 1-го порядка*) с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

Величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а b — *свободным членом* уравнения (1). Коэффициенты при неизвестных и свободный член предполагаются известными.

Произвольная система линейных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

- Всюду далее мы будем предполагать, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены в системах линейных уравнений лежат в некотором (вообще говоря, произвольном) поле F и называть систему (2) *системой линейных уравнений над полем* F. Элементы поля F мы будем называть *скалярами*.

Частное и общее решение системы. Совместные и несовместные системы

Определения

Частным решением (или просто *решением*) системы (2) называется упорядоченный набор скаляров $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ из поля F такой, что при подстановке в любое уравнение системы (2) x_1^0 вместо x_1, x_2^0 вместо x_2, $\ldots$, x_n^0 вместо x_n получается верное равенство. Система линейных уравнений (2) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной* в противном случае. *Общим решением* системы (2) называется множество всех ее частных решений.

- Общее решение есть у любой системы. В частности, у несовместной системы общим решением является пустое множество.
- Решить систему линейных уравнений — значит найти ее общее решение.

Как мы увидим в дальнейшем, во многих задачах, а также при анализе строения общего решения произвольной системы линейных уравнений важную роль играют системы, у которых правые части всех уравнений равны 0. Такие системы имеют специальное название.

Определение

Система линейных уравнений, в которой правые части всех уравнений равны 0, называется *однородной*.

Очевидно, что если в любое уравнение однородной системы вместо всех неизвестных подставить 0, то получится верное равенство. Иначе говоря, набор скаляров $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ раз}})$, где n — число неизвестных в системе, является частным решением любой однородной системы. Это решение называется *нулевым* решением. Из сказанного вытекает

Замечание 6.1

Любая однородная система линейных уравнений совместна. $\square$

Однородная система, соответствующая данной неоднородной системе

Определение

Если в системе (2) все свободные члены заменить нулями, то мы получим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3}$$

которую мы будем называть *однородной системой, соответствующей системе* (2).

Основная матрица, столбец неизвестных и столбец свободных членов системы линейных уравнений

Определения

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (2).
Первый из столбцов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

называется *столбцом неизвестных* системы (2), а второй — *столбцом свободных членов* этой системы.

Обозначим основную матрицу, столбец неизвестных и столбец свободных членов системы (2) через A, X и B соответственно. Матрицы A и X имеют размеры $m \times n$ и $n \times 1$, соответственно. По определению произведения матриц, матрица AX существует и имеет размер $m \times 1$ — такой же, как у матрицы B. Запишем матрицу AX:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

и приравняем ее к матрице B:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если расписать полученное матричное равенство поэлементно, то получится не что иное, как система (2). Таким образом, это матричное равенство равносильно системе (2). Равенство $AX = B$ (при условии, что X и B — матрицы, состоящие из одного столбца) называется *матричной записью системы линейных уравнений* (2).

Всякое частное решение системы линейных уравнений является упорядоченным набором скаляров. Поэтому следующее определение позволяет говорить о сумме частных решений системы и произведении частного решения системы на скаляр.

Определение

Пусть $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — два упорядоченных набора элементов поля F и $t \in F$. Тогда упорядоченный набор скаляров $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)$ называется *суммой наборов* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, а упорядоченный набор $(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)$ — *произведением набора* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ *на скаляр* t.

Теорема 6.1

1) *Сумма двух решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Произведение решения однородной системы линейных уравнений на скаляр является решением этой системы.*

2) *Пусть система (2) совместна, а* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ *— некоторое ее частное решение. Набор скаляров* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ *является решением этой системы тогда и только тогда, когда он равен сумме набора* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ *и некоторого частного решения однородной системы линейных уравнений, соответствующей системе (2).*

Иллюстрацией к п. 2) этой теоремы служит рис. 1.

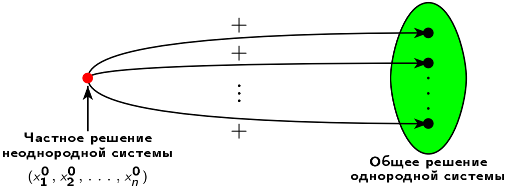

Рис. 1. Общее решение неоднородной системы

Умножение матрицы на скаляр

В доказательстве теоремы 6.1 используется операция умножения матрицы на скаляр. Определим эту операцию.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ над кольцом R. *Произведением матрицы A на скаляр $t \in R$* называется матрица $D = (d_{ij}) \in R^{m \times n}$ такая, что $d_{ij} = ta_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Эта матрица обозначается через tA. Операции сложения матриц и умножения матрицы на скаляр часто объединяют термином *линейные операции над матрицами*.

Следующие свойства операции умножения матрицы на скаляр проверяются непосредственно, исходя из определения операций.

Свойства умножения матрицы на скаляр

Если A и B — матрицы над (одним и тем же) кольцом R, а $t, s \in R$, то:

1) *если A и B — матрицы одного и того же размера, то $t(A+B) = tA + tB$ (умножение матрицы на скаляр дистрибутивно относительно сложения матриц);*
2) *$(t+s)A = tA + sA$ (умножение матрицы на скаляр дистрибутивно относительно сложения скаляров);*
3) *если произведение матриц AB определено, то $(tA)B = A(tB) = t(AB)$;*
4) *$t(sA) = (ts)A$.* $\square$

Доказательство теоремы 6.1. 1) Будем записывать наборы скаляров не в строку, а в столбец. Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

— решения системы (3), а A — основная матрица этой системы. Тогда $AY = O$ и $AZ = O$, где O — нулевой столбец. Следовательно,

$$A(Y + Z) = AY + AZ = O + O = O \quad \text{и} \quad A(tY) = t(AY) = t \cdot O = O$$

для произвольного скаляра t. Это означает, что наборы $Y + Z$ и tY являются решениями системы (3).

2) *Достаточность.* Положим

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

— частное решение однородной системы линейных уравнений, соответствующей системе (2), а B — столбец свободных членов системы (2). Тогда

$$A(X^0 + Z) = AX^0 + AZ = B + O = B.$$

Мы видим, что набор $X^0 + Z$ является решением системы (2).

Доказательство теоремы 6.1 (3)

Необходимость. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

— решение системы (2). Положим $Y = U - X^0$. Тогда Y — решение системы (3), поскольку

$$AY = A(U - X^0) = AU - AX^0 = B - B = O,$$

и $U = Y + X^0$. Теорема доказана. $\square$

Пункт 2) теоремы 6.1 говорит о том, что набор скаляров принадлежит общему решению системы тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы некоторого ее фиксированного частного решения и набора скаляров, принадлежащего общему решению соответствующей однородной системы. В связи с этим указанное утверждение часто кратко (и не вполне точно) формулируют следующим образом:

- *общее решение системы линейных уравнений равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.*

Определенные и неопределенные системы линейных уравнений. Число решений неопределенной системы над бесконечным полем (1)

Определение

Система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Следствие 6.1

Неопределенная система линейных уравнений над бесконечным полем имеет бесконечно много решений.

Доказательство. В силу п. 2) теоремы 6.1 достаточно доказать следствие для однородных систем. Пусть (3) — неопределенная однородная система линейных уравнений над бесконечным полем F. Ясно, что у нее есть по крайней мере одно ненулевое решение, т. е. решение $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ такое, что $x_i^0 \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. В силу п. 1) теоремы 6.1 набор $(tx_1^0, tx_2^0, \dots, tx_n^0)$ является решением нашей системы при любом $t \in F$.

Предположим, что $t_1, t_2 \in F$ и $t_1 \neq t_2$. Тогда $t_1 x_i^0 \neq t_2 x_i^0$. В самом деле, если $t_1 x_i^0 = t_2 x_i^0$, то умножив обе части этого равенства справа на $(x_i^0)^{-1}$, мы получим, что $t_1 = t_2$. Таким образом, если $t_1 \neq t_2$, то $(t_1 x_1^0, t_1 x_2^0, \ldots, t_1 x_n^0)$ и $(t_2 x_1^0, t_2 x_2^0, \ldots, t_2 x_n^0)$ — различные решения системы (3). Поскольку поле F бесконечно, бесконечно и число решений этой системы. $\square$

О числе решений неопределенной системы над конечным полем будет сказано в следующем параграфе.