§ 2. Бинарные отношения

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2.1. Определение, примеры и свойства бинарных отношений

Определение

Пусть n — произвольное натуральное число. n-*арным отношением* на множестве S называется произвольное подмножество множества S^n. При $n = 2, 3$ n-арные отношения имеют специальные названия: 2-арные отношения называются *бинарными*, а 3-арные — *тернарными*.

Таким образом, бинарное отношение на множестве — это некоторый набор упорядоченных пар элементов этого множества.

В дальнейшем мы будем иметь дело почти исключительно с бинарными отношениями. Поэтому слово «бинарное» часто будет опускаться.

! *Всюду в дальнейшем, кроме тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, слово «отношение» означает «бинарное отношение».*

Пусть S — произвольное множество, а α — бинарное отношение на S. По определению, α — это множество, элементами которого являются упорядоченные пары элементов из S. Если это множество содержит пару (x, y), то, наряду с записью $(x, y) \in \alpha$, мы часто будем писать $x \, \alpha \, y$.

Примеры бинарных отношений (1)

Пример 1. Пусть S — произвольное множество. Положим $\alpha = S^2$. В соответствии с определением, α — бинарное отношение на S. Оно содержит *все* упорядоченные пары элементов из S и является самым большим (по включению) отношением на S. Это отношение называется *универсальным отношением* на S. Оно обозначается через ∇_S, а если из контекста ясно, какое множество выступает в качестве S, — то просто через ∇.

Пример 2. Пусть S — произвольное множество. Определим отношение α на S правилом: $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Это отношение называется *отношением равенства* на S. Оно обозначается через Δ_S, а если множество S ясно из контекста, — то просто через Δ.

Пример 3. Пусть S — любое из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Определим отношение α на S правилом: $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$. Это отношение называется *стандартным отношением порядка* на S. Можно рассматривать также *стандартное отношение строгого порядка* β на S: $x\,\beta\,y$ тогда и только тогда, когда $x < y$.

Пример 4. На любом из множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ определим отношение $\prec$ правилом: $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $y = x + 1$. Оно называется *отношением предшествования*. Запись «$x \prec y$» читается как «x предшествует y».

Примеры бинарных отношений (2)

Пример 5. Определим отношение α на любом из множестве $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ правилом: $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда x делит y нацело. Если это условие выполнено, то будем, как обычно, писать $x \mid y$. Это отношение называется *отношением делимости*.

Пример 6. Пусть S — любое из множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, а n — натуральное число такое, что $n > 1$. Определим отношение α на множестве S правилом: $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки при делении на n. Если это условие выполнено, то будем писать $x \equiv y \pmod{n}$. Это отношение называется *отношением сравнимости по модулю* n.

Пример 7. На любом из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ определим отношение α *равенства по модулю*, полагая $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда $|x| = |y|$.

Пример 8. Пусть S — произвольное множество. Определим отношение α на множестве $\mathcal{B}(S)$ правилом: если $A, B \subseteq S$, то $A\,\alpha\,B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$. Это отношение называется *отношением включения* на булеане множества S. Представляет интерес и отношение *строгого включения* β на $\mathcal{B}(S)$, определяемое правилом: $A\,\beta\,B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

Пример 9. На множестве всех конечных множеств определим *отношение равномощности* α: $A\,\alpha\,B$ тогда и только тогда, когда A и B равномощны.

Чтобы привести следующий пример, нам понадобятся новые определения.

Определения

Пусть X — конечное множество, а X^+ — множество всевозможных конечных последовательностей элементов из X. Множество X будем называть *алфавитом*, элементы множества X — *буквами*, а элементы множества X^+ — *словами* над алфавитом X.

Слова будем записывать как последовательность букв, без пробелов и каких-либо знаков между ними и без скобок по бокам. Например, если $X = \{a, b\}$, то словами над X являются последовательности a, aaa, $abba$, $bbbabaa$ и т. д.

Определения и обозначения

Пустая последовательность букв называется *пустым словом*. Пустое слово будем обозначать через λ. Положим $X^* = X^+ \cup \{\lambda\}$. Если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$, то через $\mathbf{ab}$ обозначается слово, полученное приписыванием слова $\mathbf{b}$ к слову $\mathbf{a}$ справа. Если $\mathbf{c} = \mathbf{ab}$ для некоторых слов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X^*$, то слово $\mathbf{a}$ называется *префиксом* слова $\mathbf{c}$.

Примеры бинарных отношений (4)

Пример 10. Пусть X — произвольное конечное множество. На множестве X^* определим следующее отношение α: $\mathbf{u}\,\alpha\,\mathbf{v}$ тогда и только тогда, когда слово $\mathbf{u}$ — префикс слова $\mathbf{v}$. Будем называтьэто отношение *отношением префиксности*.

Пример 11. Определим *отношение подобия* α на множестве всех треугольников: если x и y — треугольники, то $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда эти два треугольника подобны.

Пример 12. На множестве всех прямых можно определить *отношение параллельности*: прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в этом отношении тогда и только тогда, когда они параллельны (т.е. лежат в одной плоскости и не имеют общих точек).

Пример 13. Если множество состоит из небольшого числа элементов, то бинарное отношение на нем можно задать, явно указав все упорядоченные пары, принадлежащие этому отношению. Например, на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ можно ввести следующее бинарное отношение:

$$\alpha = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(4,1),(5,3)\}. \tag{1}$$

Пример 14. Произвольное отображение f из множества S в себя можно рассматривать как бинарное отношение α на S, задаваемое правилом: $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда $y = f(x)$.

Определим несколько важных типов бинарных отношений.

Определения

Бинарное отношение α на множестве S называется:

- *рефлексивным*, если $x \,\alpha\, x$ для любого $x \in S$;
- *симметричным*, если для любых $x, y \in S$ из того, что $x \,\alpha\, y$, вытекает, что $y \,\alpha\, x$;
- *антисимметричным*, если для любых $x, y \in S$ из того, что $x \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, x$, вытекает, что $x = y$;
- *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in S$ из того, что $x \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, z$, вытекает, что $x \,\alpha\, z$.

Основные типы бинарных отношений: примеры (таблица)

В табл. 1 указано, какие из отношений, упоминаемых в примерах 1–12, являются рефлексивными, симметричными, антисимметричными и транзитивными, а какие нет.

Табл. 1. Основные типы бинарных отношений: примеры

Отношение	Множество	Рефлексивность	Симметричность	Антисимметричность	Транзитивность
∇_S	Любое	$+$	$+$	$-$	$+$
Δ_S	Любое	$+$	$+$	$+$	$+$
$\leqslant$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$+$	$-$	$+$	$+$
$<$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\prec$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	$-$	$-$	$+$	$-$
$\mid$ (делимость)	$\mathbb{N}$	$+$	$-$	$+$	$+$
	$\mathbb{Z}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\equiv \pmod{n}$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	$+$	$+$	$-$	$+$
Равенство по модулю	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\subseteq$	$\mathcal{B}(S)$, S — любое	$+$	$-$	$+$	$+$
$\subset$	$\mathcal{B}(S)$, S — любое	$-$	$-$	$+$	$+$
Равномощность	Множество всех конечных множеств	$+$	$+$	$-$	$+$
Отношение префиксности	X^*	$+$	$-$	$+$	$+$
Подобие треугольников	Множество всех треугольников	$+$	$+$	$-$	$+$
Параллельность прямых	Множество всех прямых	$-$	$+$	$-$	$-$
Задано равенством (1)	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$-$	$-$	$-$	$-$

Отметим, что свойства отношения делимости зависят от того, на каком множестве оно рассматривается: на множестве $\mathbb{N}$ оно антисимметрично, а на множестве $\mathbb{Z}$ — нет (поскольку, например, $1 \mid -1$ и $-1 \mid 1$, но $1 \neq -1$).

Почти все утверждения, содержащиеся в табл. 1, очевидны. В специальном обосновании нуждается лишь антисимметричность отношений строгого порядка, предшествования и строгого включения и нетранзитивность отношения параллельности прямых. Ясно, что чисел x и y, для которых одновременно выполнялись бы условия $x < y$ и $y < x$, не существует. Но это означает, что о любой паре чисел с такими свойствами можно утверждать все, что угодно, в том числе и то, что $x = y$. (Это вытекает из общего принципа математической логики: *из ложной посылки вытекает все, что угодно* или, говоря более строго, *если посылка импликации ложна, то импликация истинна*.) Следовательно, отношение строгого порядка антисимметрично. Аналогично устанавливается антисимметричность отношений предшествования и строгого включения. Наконец, если обозначить через ℓ_1 и ℓ_2 параллельные прямые и положить $\ell_3 = \ell_1$, то мы получим, что $\ell_1 \parallel \ell_2$ и $\ell_2 \parallel \ell_3$, но $\ell_1 \nparallel \ell_3$ (последнее вытекает из того, что совпадающие прямые не параллельны). Следовательно, отношение параллельности прямых не транзитивно.

2.2. Отношения эквивалентности и разбиения множества

Определение

Бинарное отношение называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Из табл. 1 видно, что из отношений, упомянутых в примерах 1–13, отношениями эквивалентности являются шесть: универсальное отношение и отношения равенства, равенства по модулю, сравнимости по данному модулю, равномощности и подобия треугольников.

Определение

Пусть S — произвольное множество, α — эквивалентность на S и $x \in S$. Множество всех элементов $y \in S$ таких, что $x\,\alpha\,y$, называется α-*классом* элемента x и обозначается через x^α. Подмножество T в S называется *классом эквивалентности* отношения α, если $T = x^\alpha$ для некоторого $x \in S$.

Например, если α — отношение равенства по модулю на $\mathbb{Z}$, то $5^\alpha = \{5, -5\}$, если α — отношение сравнимости по модулю 3 на $\mathbb{N}$, то 8^α — множество всех натуральных чисел, имеющих остаток 2 при делении на 3, а если α — отношение равномощности на множестве всех конечных множеств, то $\{-1, 0, 1\}^\alpha$ — множество всех 3-элементных множеств.

Разбиения множества (1)

С понятием отношения эквивалентности тесно связано понятие разбиения множества.

Определение

Разбиением множества S называется семейство непустых подмножеств этого множества такое, что объединение всех множеств из этого семейства равно S, а пересечение любых двух различных множеств из семейства пусто. Множества из этого семейства называются *классами* разбиения.

Приведем несколько примеров разбиений.

1) Для любого непустого множества S можно определить разбиение, состоящее из одного класса S.

2) Еще одно разбиение произвольного непустого множества — это его разбиение на всевозможные одноэлементные подмножества.

3) Семейство множеств $S_1 = \{1, 2, 5\}$, $S_2 = \{3\}$, $S_3 = \{4, 7, 8\}$, $S_4 = \{6, 9\}$ является разбиением множества $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ на четыре класса.

4) Множество $\mathbb{N}$ можно разбить на 3 класса: S_0, S_1 и S_2, где S_i — это множество всех натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток i $(i = 0, 1, 2)$.

Разбиения множества (2)

5) Множество всех непустых конечных множеств можно разбить в объединение бесконечного числа классов $S_1, S_2, \ldots$, где, для всякого $n \in \mathbb{N}$, S_n — это множество всех n-элементных множеств.

6) Множество всех треугольников на плоскости разбивается на бесконечное число классов, в каждый из которых входят все треугольники, подобные некоторому фиксированному треугольнику, и только они.

7) На рис. 1 приведен еще один пример разбиения: множество всех точек прямоугольника разбито на семь подмножеств, раскрашенных в разные цвета.

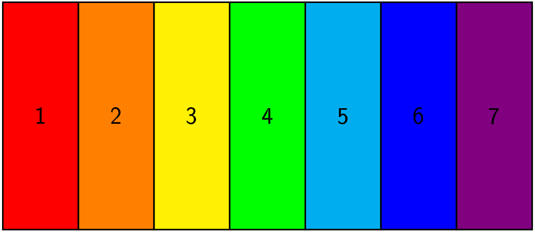

Рис. 1. Разбиение прямоугольника на семь частей

Связь между отношениями эквивалентности и разбиениями (1)

Теорема 2.1

Пусть S — произвольное множество. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех отношений эквивалентности на множестве S и множеством всех разбиений этого множества.

Схема доказательства. Обозначим через $\mathrm{Eq}(S)$ множество всех отношений эквивалентности на S, а через $\mathrm{Part}(S)$ — множество всех разбиений множества S. Мы не будем приводить полного доказательства теоремы 2.1, так как это выходит за рамки нашего курса, но укажем (без доказательства) как строятся биекция из $\mathrm{Eq}(S)$ на $\mathrm{Part}(S)$ и обратная к ней биекция из $\mathrm{Part}(S)$ на $\mathrm{Eq}(S)$.

Пусть S — произвольное множество, а α — отношение эквивалентности на S. Пусть, далее, $\{S_i \mid i \in I\}$ — совокупность всевозможных классов эквивалентности отношения α. Проверим, что этот набор подмножеств множества S образует разбиение S. Пусть $x \in S$. Тогда $x\,\alpha\,x$, поскольку отношение α рефлексивно. Следовательно, $x \in x^{\alpha}$. Итак, всякий элемент множества X лежит в некотором α-классе, и потому $S = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$.

Далее, пусть $S_i = x^\alpha$ и $S_j = y^\alpha$ — два различных α-класса. В частности, $y \notin S_i$. Предположим, что $S_i \cap S_j \neq \varnothing$. Следовательно, существует элемент $z \in S_i \cap S_j$. Это означает, что $x\,\alpha\,z$ и $y\,\alpha\,z$. Из симметричности α и того факта, что $y\,\alpha\,z$, вытекает, что $z\,\alpha\,y$. Учитывая, что $x\,\alpha\,z$, $z\,\alpha\,y$ и α транзитивно, получаем, что $x\,\alpha\,y$. Но тогда $y \in x^\alpha = S_i$ вопреки сказанному выше. Мы доказали, что набор всевозможных α-классов множества S образует разбиение этого множества. Можно доказать, что отображение из $\mathrm{Eq}(S)$ в $\mathrm{Part}(S)$, которое ставит в соответствие всякой эквивалентности α на S набор всевозможных α-классов, является биекцией из $\mathrm{Eq}(S)$ на $\mathrm{Part}(S)$.

Обратно, пусть $\Psi = \{S_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества S. Определим бинарное отношение α на S правилом: $x\,\alpha\,y$ тогда и только тогда, когда $x, y \in S_i$ для некоторого $i \in I$. Очевидно, что отношение α рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности. Можно доказать, что отображение из $\mathrm{Part}(S)$ в $\mathrm{Eq}(S)$, которое всякому разбиению Ψ множества S ставит в соответствие только что определенное отношение эквивалентности α, является биекцией из $\mathrm{Part}(S)$ на $\mathrm{Eq}(S)$, обратной к биекции из $\mathrm{Eq}(S)$ на $\mathrm{Part}(S)$, построенной на предыдущем слайде. $\square$

Определение

Пусть α — отношение эквивалентности на множестве S. Множество всех α-классов элементов множества S называется *фактор-множеством* множества S по отношению α и обозначается через S/α.

Приведем три примера, иллюстрирующих это понятие.

Пример 1. Если α — отношение сравнимости по модулю 2 на множестве $\mathbb{Z}$, то фактор-множество S/α состоит из двух элементов: множества всех четных чисел и множества всех нечетных чисел.

Пример 2. Если α — отношение равномощности на множестве всех непустых конечных множеств, то каждый элемент фактор-множества S/α — это совокупность всех n-элементных множеств для некоторого натурального n. Очевидно,что существует взаимно-однозначное соответствие между фактор-множеством S/α и множеством $\mathbb{N}$.

Пример 3. В курсе аналитической геометрии было дано определение вектора как множества всех направленных отрезков одной и той же длины и одного и того же направления. Используя понятия отношения эквивалентности и фактор-множества, можно дать несколько более формализованное определение этого понятия. Обозначим через S множество всех направленных отрезков. Введем на множестве S бинарное отношение α следующим образом: $\overrightarrow{AB} \,\alpha\, \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Легко проверяется, что отношение α является отношением эквивалентности. Это позволяет рассмотреть фактор-множество S/α. Каждый его элемент — это множество всех направленных отрезков, попадающих в один α-класс с некоторым фиксированным направленным отрезком. Очевидно, что определение вектора, данное в курсе аналитической геометрии, равносильно следующему.

Определение

Вектором называется произвольный элемент фактор-множества S/α, где S — множество всех направленных отрезков, а α — введенное выше бинарное отношение на S.

2.3. Отношения частичного порядка

Определение

Бинарное отношение называется *отношением частичного порядка* (а также *отношением порядка*, *частичным порядком* или просто *порядком*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Множество, на котором задано отношение частичного порядка, будем называть *частично упорядоченным* (или просто *упорядоченным*) *множеством*, сокращенно — *чумом*. Если α — отношение частичного порядка на множестве S, то будем говорить, что S *частично упорядочено* (или просто *упорядочено*) отношением α.

С помощью табл. 1 легко установить, что из отношений, упомянутых в примерах 1–11, отношениями частичного порядка являются пять: отношение равенства, стандартное отношение порядка на числовых множествах, отношение делимости на $\mathbb{N}$ (но не на $\mathbb{Z}$!), отношение включения на булеане некоторого множества и отношение префиксности на множестве всех слов над некоторым алфавитом.

- Чум — это пара, состоящая из множества S и заданного на нем отношения частичного порядка α. Мы будем обозначать эту пару через $\langle S; \alpha\rangle$.

В дальнейшем мы часто будем использовать символ $\leqslant$ для обозначения произвольного отношения частичного порядка на любом множестве (в тех случаях, когда этот символ будет означать обычное отношение порядка на числовом множестве, это будет оговариваться особо). При этом, если $x \leqslant y$ и $x \neq y$, то мы будем писать $x < y$ или $y > x$. Отношение $<$ на произвольном чуме называется отношением *отношением строгого порядка* или просто *строгим порядком*.

Определение

Пусть S — множество, упорядоченное отношением $\leqslant$. Элементы $x, y \in S$ называются *сравнимыми относительно* $\leqslant$, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Отношение $\leqslant$ называется *отношением линейного порядка* (или просто *линейным порядком*), если любые два элемента из S сравнимы относительно $\leqslant$. Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется *линейно упорядоченным множеством* или *цепью*.

Например, стандартные отношения $\leqslant$ и $\geqslant$ на числовых множествах являются линейными порядками, а отношения равенства, делимости (на $\mathbb{N}$) и включения — не являются.

Лексикографический порядок (1)

Чтобы привести еще один важный пример отношения линейного порядка, нам понадобится новое понятие.

Определения и обозначения

Пусть $\langle X; \leqslant \rangle$ — непустое конечное линейно упорядоченное множество. Определим отношение α на множестве X^* следующим образом. Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X^*$, то $\mathbf{u} \, \alpha \, \mathbf{v}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

1) $\mathbf{u}$ — префикс $\mathbf{v}$;
2) существуют слова $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in X^*$ и буквы $x, y \in X$ такие, что $\mathbf{u} = \mathbf{a}x\mathbf{b}_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{a}y\mathbf{b}_2$ и $x < y$.

Отношение α называется *отношением лексикографического порядка* или просто *лексикографическим порядком* на множестве X^*.

Если отношение лексикографического порядка, определенное на множестве X^*, ограничить на множество X, то получится исходно заданное на X отношение линейного порядка $\leqslant$. Иными словами, отношение лексикографического порядка расширяет исходное отношение порядка с множества X на множество X^*. Поэтому отношение лексикографического порядка на X^* обозначается также, как отношение линейного порядка на X, т. е. через $\leqslant$.

Лексикографический порядок (2)

- Если X — множество букв русского языка, упорядоченное в алфавитном порядке (а $\leqslant$ б $\leqslant \cdots \leqslant$ я), то лексикографический порядок на множестве всех слов русского языка — это именно тот порядок, в котором слова идут в словаре. Этим и объясняются термины «алфавит», «буквы», «слова» и «лексикографический порядок» (лексикография — раздел языкознания, посвященный составлению словарей).

В словаре русского слова располагаются по алфавиту. При этом для любых двух слов можно сказать, какое из них стоит раньше другого. Иначе говоря, отношение лексикографического порядка на множестве всех слов русского языка является отношением линейного порядка. Как показывает лемма со следующего слайда, то же самое справедливо и в общем случае.

Лемма 2.1

Пусть X — произвольное непустое конечное множество. Отношение лексикографического порядка $\leqslant$ на множестве X^* является отношением линейного порядка.

Доказательство. Требуется доказать, что отношение лексикографического порядка рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и линейно. Мы ограничимся проверкой рефлексивности и линейности. Антисимметричность и транзитивность проверяются более громоздко, и эту часть доказательства мы пропускаем.

Рефлексивность. Каждое слово $\mathbf{u} \in X^*$ является своим префиксом, поскольку $\mathbf{u} = \mathbf{u}\lambda$. Следовательно, $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{u}$ для всякого $\mathbf{u} \in X^*$.

Линейность. Пусть $\mathbf{u} = x_1 x_2 \cdots x_k$ и $\mathbf{v} = y_1 y_2 \cdots y_m$ — слова над алфавитом X. Без ограничения общности можно считать, что $k \leqslant m$. Если $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_k = y_k$, то $\mathbf{u}$ — префикс $\mathbf{v}$, и потому $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$. Поэтому далее можно считать, что $x_j \neq y_j$ для некоторого $j \leqslant k$. Пусть j — наименьший индекс с таким свойством. Поскольку отношение $\leqslant$ на множестве X линейно, выполнено одно из соотношений $x_j < y_j$ и $y_j < x_j$. В первом случае $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$, а во втором $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$. $\square$

Отношение покрытия и диаграмма чума

Определение

Пусть $\langle S; \leqslant \rangle$ — произвольный чум и $x, y \in S$. Говорят, что y *покрывает* x, если $x < y$ и не существует элемента z такого, что $x < z < y$.

Заметим, что если $\leqslant$ — стандартное отношение порядка на одном из множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, то y покрывает x тогда и только тогда, когда $x \prec y$. Чумы с небольшим числом элементов (а иногда и бесконечные, но просто устроенные чумы) удобно изображать с помощью так называемых *диаграмм* частично упорядоченных множеств. Диаграмма чума рисуется следующим образом: каждый элемент чума изображается точкой. Если при этом y покрывает x, то y рисуется выше, чем x, и соответствующие точки соединяют линией (как правило, отрезком прямой).

- Допуская вольность речи, часто говорят, что на рисунках изображаются не диаграммы чумов, а сами чумы.

На рис. 2 на следующем слайде изображены диаграммы следующих частично упорядоченных множеств:

S_1 — множество $\mathcal{B}(\{1,2,3\})$ с отношением включения,

S_2 — множество $\{2,3,\ldots,12\}$ с отношением делимости,

S_3 и S_4 — множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ соответственно с естественным отношением порядка[1],

S_5 — множество все слов длины не более 3 над алфавитом $\{a,b\}$ с отношением префиксности[2],

S_6 — произвольное множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ с отношением равенства.

Из этих диаграмм наглядно видно, что чумы S_3 и S_4 являются цепями, а чумы S_1, S_2, S_5 и S_6 — не являются. В чуме S_6 любые два различных элемента несравнимы. Такие чумы называются *антицепями*.

[1] Поскольку эти чумы бесконечны, на рис. 2 изображены только небольшие фрагменты их диаграмм, из которых, тем не менее, ясно, как эти диаграммы устроены в целом.

[2] *Длиной* слова называется число входящих в него букв; при этом каждая буква считается столько раз, сколько она входит в слово. Например, длина слова *baaabba* равна 7.

Примеры диаграмм чумов (2)

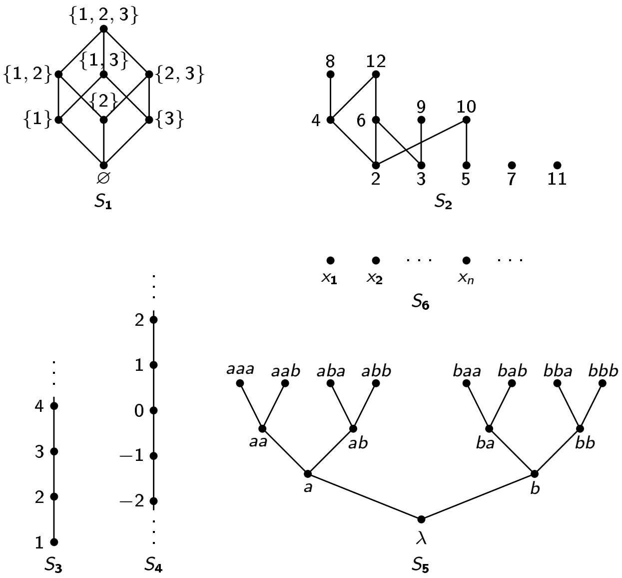

Рис. 2. Диаграммы чумов

Определения

Элемент x частично упорядоченного множества $\langle S; \leqslant \rangle$ называется:

- *минимальным*, если не существует элемента $y \in S$ такого, что $y < x$;
- *максимальным*, если не существует элемента $y \in S$ такого, что $x < y$;
- *наименьшим*, если $x \leqslant y$ для любого $y \in S$;
- *наибольшим*, если $y \leqslant x$ для любого $y \in S$.

В табл. 2 указаны минимальные, максимальные, наименьшие и наибольшие элементы пяти чумов, изображенных на рис. 2.

Табл. 2. Типы элементов: примеры

Чум	Минимальные элементы	Максимальные элементы	Наименьшие элементы	Наибольшие элементы
S_1	$\varnothing$	$\{1, 2, 3\}$	$\varnothing$	$\{1, 2, 3\}$
S_2	2,3,5,7,11	7,8,9,10,11,12	нет	нет
S_3	1	нет	1	нет
S_4	нет	нет	нет	нет
S_5	λ	$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$	λ	нет
S_6	$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$	$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$	нет	нет

Элемент чума может быть одновременно как минимальным, так и максимальным. В приведенных выше примерах этим свойством обладают элементы 7 и 11 чума S_2 и все элементы чума S_6.

Замечание 2.1

Если чум содержит наименьший [наибольший] элемент, то этот элемент является единственным минимальным [максимальным] элементом.

Доказательство. Докажем утверждение о минимальных элементах, утверждение о максимальных элементах проверяется аналогично. Пусть x — наименьший элемент чума S и $y \in S$. Тогда $x \leqslant y$. Следовательно, $y \nless x$, и потому элемент x минимален. Предположим, что z — другой минимальный элемент в S. Тогда $x \leqslant z$ (так как x — наименьший элемент) и $x \nless z$ (в силу минимальности z). Следовательно, $x = z$. □

2.4. Отношения квазипорядка. Ассоциированные элементы

Определение

Бинарное отношение на множестве S называется *отношением квазипорядка* или просто *квазипорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно. Множество, на котором задано отношение квазипорядка, называется *квазиупорядоченным*.

Ясно, что как любое отношение эквивалентности, так и любое отношение частичного порядка является квазипорядком. Обратное неверно. Естественный пример квазипорядка, не являющегося ни эквивалентностью, ни частичным порядком, — это отношение делимости на множестве $\mathbb{Z}$. Очевидно, что оно рефлексивно и транзитивно, но не симметрично и не антисимметрично. В дальнейшем мы еще встретимся с примером отношения квазипорядка при изучении многочленов.

Определение

Пусть $\langle S;\alpha\rangle$ — квазиупорядоченное множество. Элементы $x, y \in S$ называются *ассоциированными*, если $x\,\alpha\,y$ и $y\,\alpha\,x$.

Например, как легко понять, элементы m и n квазиупорядоченного множества $\langle\mathbb{Z};|\rangle$ ассоциированы тогда и только тогда, когда $|m| = |n|$. Иными словами, в данном случае отношение ассоциированности — это отношение равенства по модулю. Заметим, что оно является отношением эквивалентности (см. табл. 1). Как показывает утверждение со следующего слайда, это не случайно.

Ассоциированные элементы (2)

Замечание 2.2

Пусть $\langle S; \alpha \rangle$ — квазиупорядоченное множество, а σ — отношение ассоциированности на S. Тогда σ — отношение эквивалентности.

Доказательство. Пусть $x, y, z \in S$. Из рефлексивности отношения α вытекает, что $x \,\alpha\, x$, а значит $x \,\sigma\, x$. Следовательно, отношение σ рефлексивно. Далее, если $x \,\sigma\, y$, то $x \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, x$. Но тогда, очевидно, $y \,\sigma\, x$. Следовательно, σ симметрично. Пусть, наконец, $x \,\sigma\, y$ и $y \,\sigma\, z$. Это означает, что $x \,\alpha\, y$, $y \,\alpha\, x$, $y \,\alpha\, z$ и $z \,\alpha\, y$. Поскольку отношение α транзитивно, из того, что $x \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, z$, вытекает, что $x \,\alpha\, z$, а из того, что $z \,\alpha\, y$ и $y \,\alpha\, x$, следует, что $z \,\alpha\, x$. Следовательно, $x \,\sigma\, z$, и потому отношение σ транзитивно. $\square$