

Вопросы к экзамену по курсу «Основы алгебры»
Зимняя сессия 2024-2025 уч. года
(группы МТ-101,102)

1. Мощность конечного множества. Булеан множества. Мощность прямого произведения конечного числа конечных множеств и булеана n -элементного множества.
2. Размещения и перестановки. Транспозиции. Четные и нечетные перестановки, смена четности перестановки при транспозиции. Теорема о перечислении перестановок.
3. Сочетания. Биномиальные коэффициенты и их свойства.
4. Комплексные числа: определение, вложение действительных чисел в комплексные, алгебраическая форма записи комплексных чисел, комплексное сопряжение.
5. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корней из них.
6. Корни из единицы.
7. Строение общего решения системы линейных уравнений.
8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: приведение матрицы к ступенчатому виду, общая схема метода Гаусса и обоснование его корректности.
9. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: случаи несовместной, определенной и неопределенной системы. Число свободных переменных в неопределенной системе. Метод Гаусса-Жордана в случае определенной системы.
10. Определители: определение, определители малых порядков, 1-е свойство определителей (неизменяемость при транспонировании).
11. Определители: свойства со 2-го по 7-е.
12. 8-е и 9-е свойства определителей. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя произвольной квадратной матрицы методом приведения к треугольному виду.
13. Определитель полураспавшейся матрицы и определитель произведения матриц.
14. Определитель Вандермонда.
15. Крамеровские системы линейных уравнений. Теорема Крамера и следствия из нее.
16. Многочлены от одной переменной: определение, операции, кольцо многочленов. Стандартная запись многочлена. Теорема о делении многочленов с остатком.
17. Наибольший общий делитель двух многочленов. Взаимно простые многочлены.
18. Многочлены как функции. Интерполяционный многочлен Лагранжа: существование, единственность, два способа нахождения.
19. Два понятия равенства многочленов.
20. Корни многочленов. Теорема Безу и следствие из нее.
21. Основная теорема алгебры и следствия из нее.
22. Лемма о модуле старшего члена и следствие о модуле корня. Лемма о корнях многочлена над полем \mathbb{C} с действительными коэффициентами.
23. Существование действительных корней у многочленов нечетной степени над полем \mathbb{R} (аналитическое и алгебраическое доказательства).
24. Теорема Штурма. Число действительных корней многочлена над полем \mathbb{R} .
25. Рациональные корни многочленов над полем \mathbb{Q} .
26. Неприводимые многочлены и их общие свойства. Разложение многочлена на неприводимые множители.
27. Отделение кратных множителей.
28. Неприводимые многочлены над полями \mathbb{C} и \mathbb{R} .
29. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости многочленов над кольцом \mathbb{Z} и над полем \mathbb{Q} . Критерий Эйзенштейна.
30. Алгоритм Кронекера.
31. Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.
32. Ослабленный закон сокращения для матриц. Значение многочлена от матрицы. Характеристический многочлен матрицы. Теорема Гамильтона-Кэли.
33. Минимальный многочлен матрицы и его свойства.

34. Обратная матрица: определение, критерий существования, формула для вычисления, способ нахождения с помощью элементарных преобразований матрицы. Решение систем линейных уравнений и матричных уравнений с помощью обратной матрицы.
35. Ранг матрицы по минорам: определение и способ нахождения.