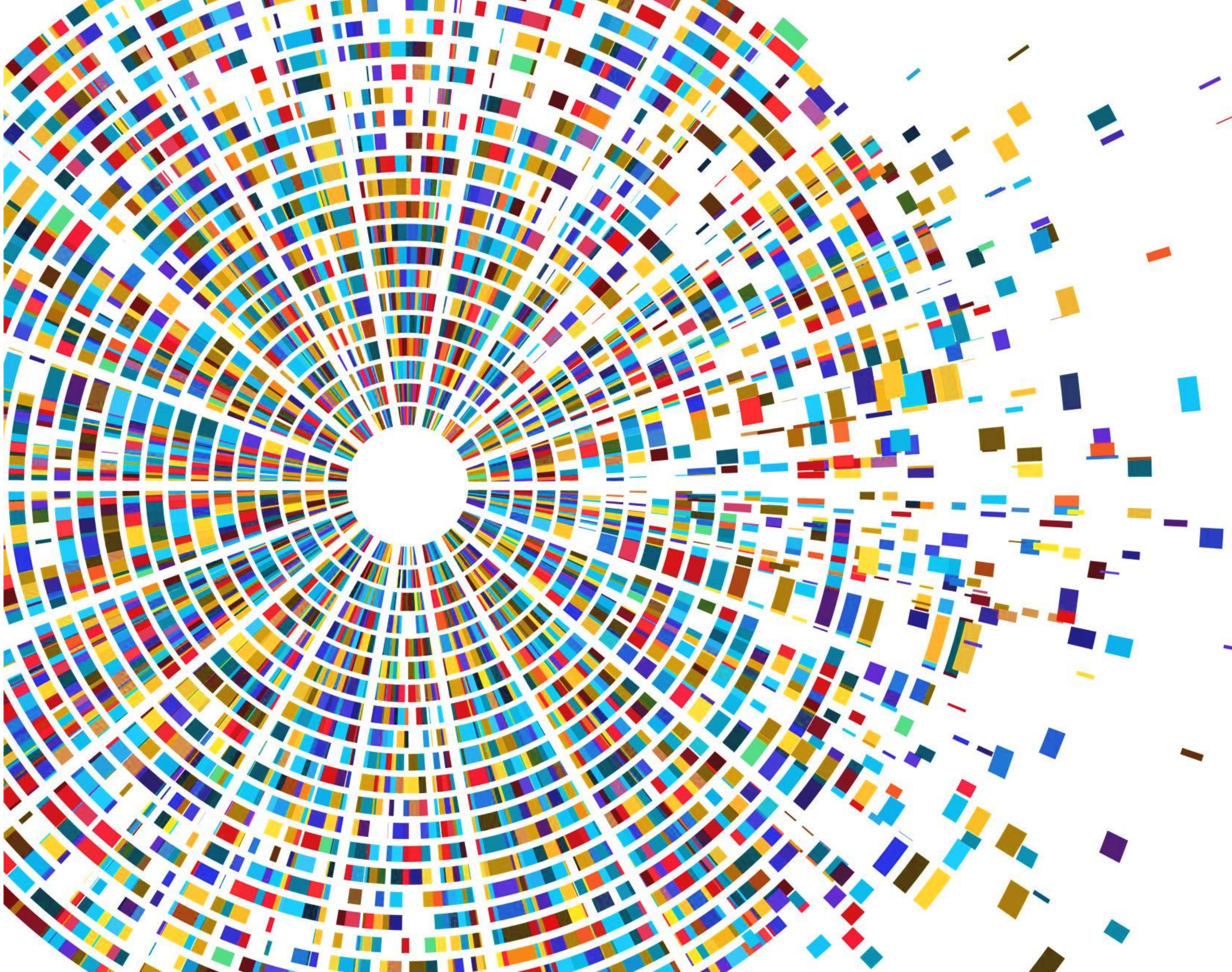
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ
Решенный тренировочный вариант контрольной работы
Задача 10



Направл.: Математика и компьютерные науки

к.ф.-м.н., доцент
Нагребецкая Ю.В.

Участвовал в проекте студенты **Зарипов В., Старков Э., Корватовская С., Коваленко А.**

Определение трансдьюсера

- **Трансдьюсер** – $A=(Q, \Sigma_1, \Sigma_2, \alpha, \beta, q_0, F)$, где
- Q – множество всех состояний
- Σ_1 - входной алфавит
- Σ_2 - выходной алфавит
- α - функция переходов $\alpha \subseteq Q \times \Sigma_1 \times Q$
- β - функция выходов $\beta \subseteq Q \times \Sigma_1 \times \Sigma_2$
- q_0 - начальное состояние
- F – множество выходных состояний

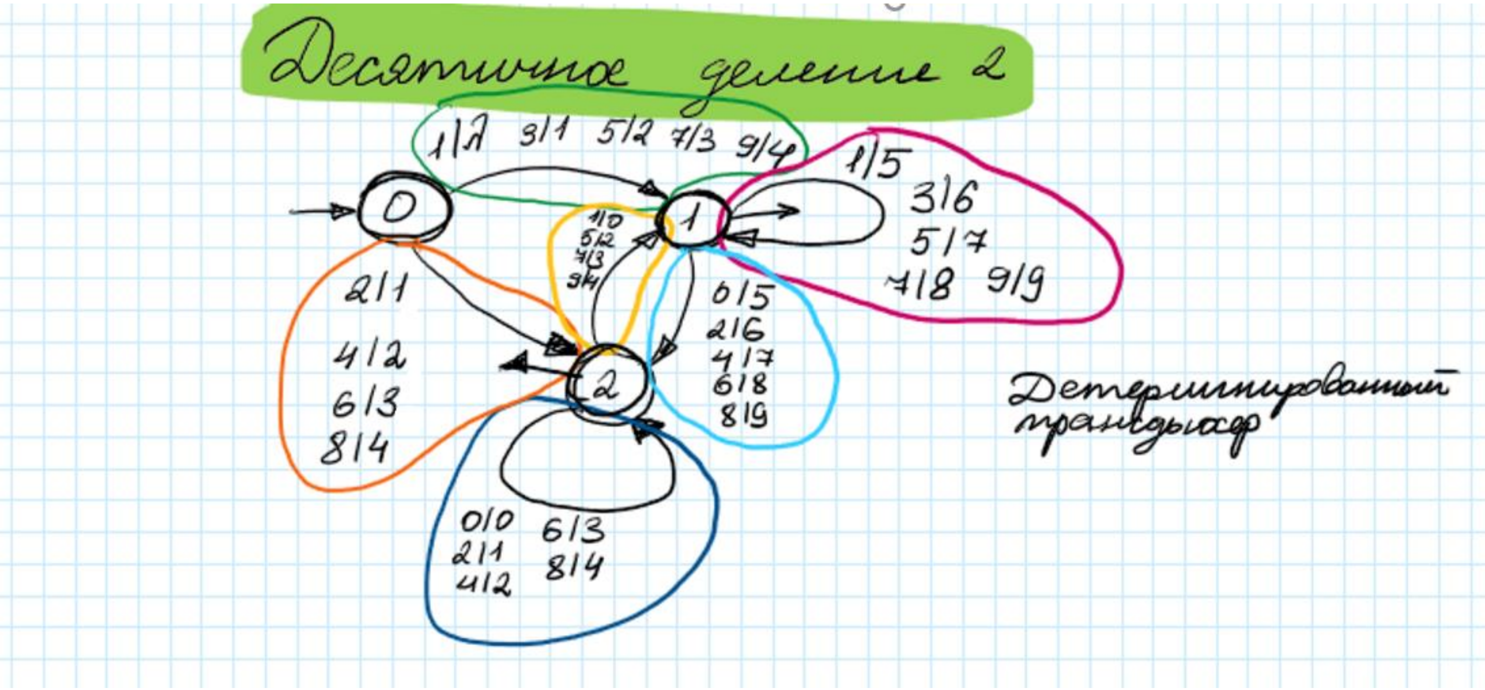
- **Замечание**. Вместо алфавитов Σ_1 ,Σ_2 в α, β можно подставить Σ_1^* и Σ_2^* и даже любые подмножества множеств Σ_1^* и Σ_2^* соответственно.

Определение отношения

- $\tau \subseteq \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$, τ - отношение на $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ (подмножество пар слов)
- Пара (u, v) распознается трансдьюсером, если $(q_0, u, f) \in \alpha$; $f \in F$; $(q_0, u, v) \in \beta$
- $\tau \subseteq \Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ называется **рациональным**, если
- 1) $\tau = (a, \varepsilon)$, $\tau = (\varepsilon, b)$
- 2) $\tau = \tau_1 \cdot \tau_2$, $\tau = \tau_1^*$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$, где τ_1 ,τ_2 - рациональные
- **Следствие**: любое рациональное отношение распознается трансдьюсером.

- Трансдьюсер называется **детерминированным,** если для каждого входного слова существует точно одно выходное.

Трансдьюсер, который по данному натуральному десятичному числу находит целую часть частного при делении на 2.




```
12383 | 2
        ------
12        6191
12
  03
   2
   18
   18
    03
     2
     1
```

Пояснения. В вершину 1 попадаем, если остаток от деления делимого текущего однозначного или двузначного числа на 2 равен 1, а в вершину 2 попадаем, если остаток равен 0.

Например. Трансдьюсер просматривает слово 12383, пишет слово 6191. Соответствующий путь: 0->1->2->1->2->1, поскольку остатки от деления текущих делимых чисел 1, 12, 3, 18, 3 на 2 равны соответственно 1, 0, 1, 0, 1, а соответствующие частные равны $\lambda, 6, 1, 9, 1$

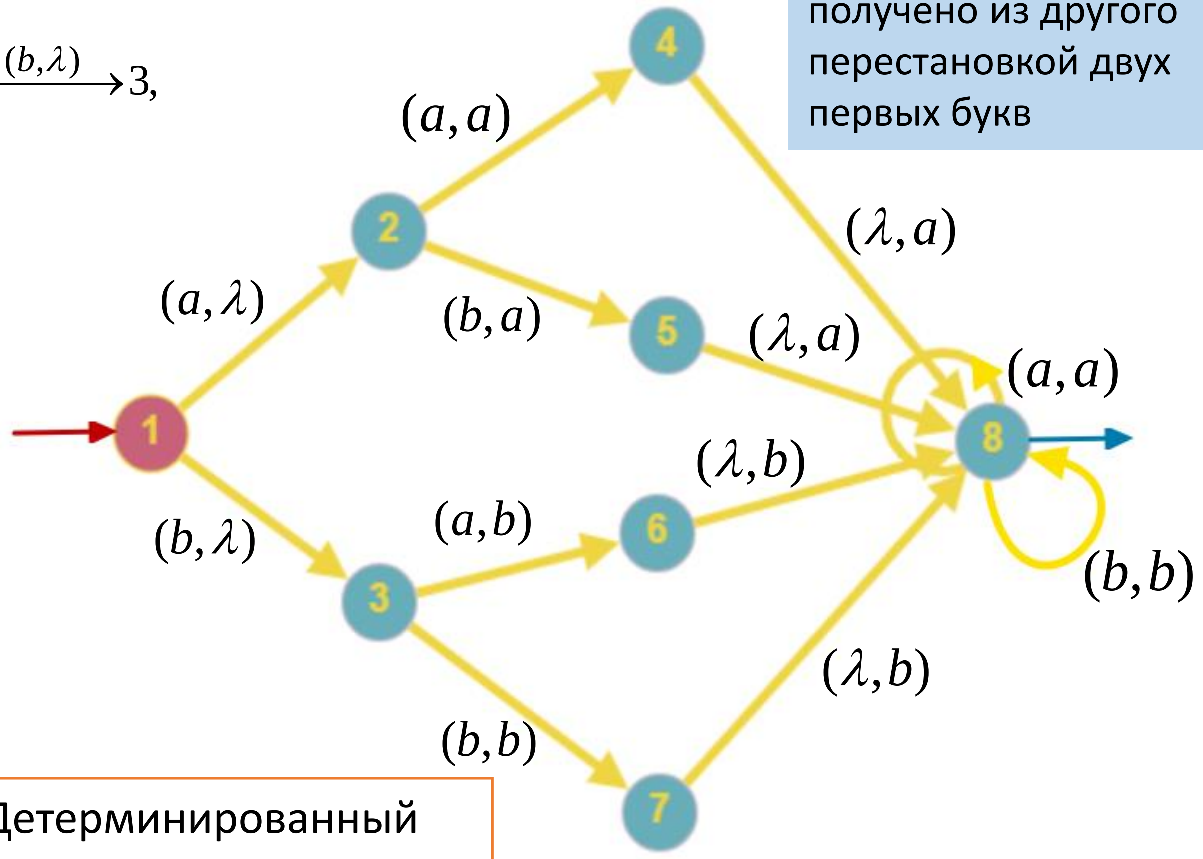
Задача 1 (вспомогательная)

Построить конечный (детерминированный) трансдьюсер, меняющий местами первые две буквы в слове над алфавитом {a,b}

Распознает рацион. отношение: одно слово может быть получено из другого перестановкой двух первых букв

Пояснения к задаче 1 (вспомогательной).
Сначала стираем первую букву: $1 \xrightarrow{(a,\lambda)} 2,\ 1 \xrightarrow{(b,\lambda)} 3,$

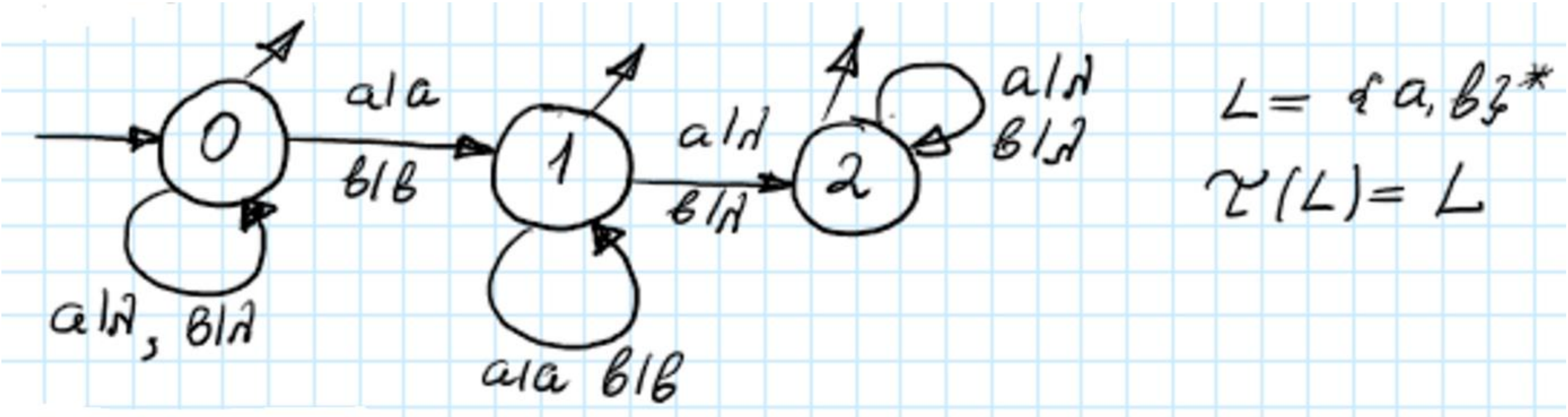
Возможны 4 случая:
1) слово начинается на ***aa*** (путь 1->2->4->8). Тогда стираем первую букву ***a*** (1->2), вторую букву ***a*** переписываем (2->4), а потом дописываем букву ***a.***
2) слово начинается на ***ab*** (путь 1->2->5->8). Тогда стираем первую букву ***a*** (1->2), вторую букву ***b*** меняем на ***a*** (2->3), а потом дописываем букву ***a.***
Аналогично, случаи 3),4), когда слово начинается на ***ba, bb*** соответственно.
Остаток слова переписываем побуквенно (две петли на вершине 8).



Детерминированный трансдьюсер

Задача 2 (дополнительная)

Построить конечный трансдьюсер, отображающий любое слово над алфавитом {a,b} во множество его подслов (распознающий отношение второго слова быть подсловом первого слова)



Распознает рациональное отношение:
второе слово является подсловом первого слова

Недетерминированный трансдьюсер

Пояснения к задаче 2 (вспомогательной).

Вначале слова можно стереть сколько угодно букв из префикса (петля на вершине 0) и выйти.

Затем можно скопировать часть слова и выйти путь 0->1).

Наконец, можно стереть суффикс слова и выйти (путь 1->2 и петля на вершине 2).

Задача 3 (дополнительная)

Построить конечный (детерминированный) трансдьюсер, который по двоичному числу находит остаток от деления этого числа на 3 и записывает его в двоичном виде

Теорема. Остаток от деления двоичного числа на 3 равен остатку от деления суммы единиц двоичной записи этого числа с учетом четности разряда: «+» для четных разрядов и «–» для нечетных. Разряды нумеруются справа налево, начиная с нулевого (четного) разряда.

(Можно складывать не единицы, а просто все подряд нули и единицы с учетом четности разряда, начиная с нулевого, поскольку нули вклад в сумму не дают)

Пример. Найти двоичный остаток от деления числа 1110 на 3.
1110 – это двоичная запись числа 14. Складываем нули и единицы в записи двоичного числа 1110 справа налево, начиная с нулевого разряда с учетом их четности:
0-1+1-1=-1. Далее, -1=2(mod 3). Действительно, 14=2(mod 3). Двоичная запись числа 2 – 10.
Ответ: **10**.

Задача 3 (дополнительная)

Теорема. Остаток от деления двоичного числа на 3 равен остатку от деления суммы единиц двоичной записи этого числа с учетом четности разряда: «+» для четных разрядов и «–» для нечетных. Разряды нумеруются справа налево, начиная с нулевого (четного) разряда.

Доказательство. Если на четном разряде стоит 1, то это значит, что в разложении по степеням двойки исходного числа ему соответствует слагаемое $2^{\text{четное}} = 4^k$.
А если нечетное, то - слагаемое $2^{\text{нечетное}} = 2 \cdot 4^k$.
Мы все вычисления проводим в кольце вычетов по модулю 3. Тогда
$[2^{\text{четное}}] = [4^k] = ([4])^k = ([1])^k = [1]$, где $[m]$ – класс вычетов по $mod\ 3$, содержащий число m.
А если единица была в нечетном разряде, то разложении исходного числа есть слагаемое
$[2^{\text{нечетное}}] = [\,2 \cdot\ 4^k] = [2][4^k] = [-1][1] = [-1]$.
Итак, исходное число равно сумме 1 с учетом четности (по mod 3).

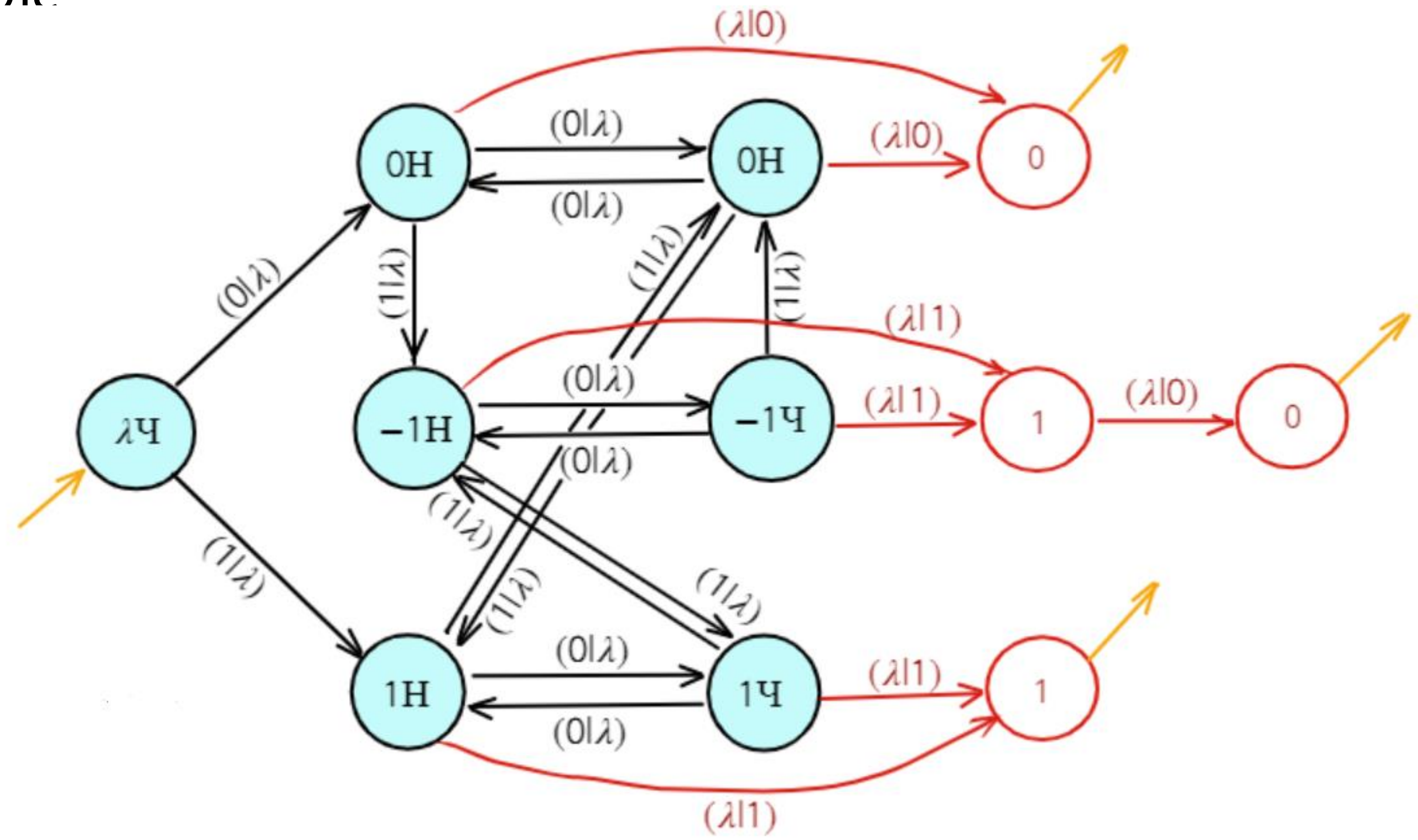
Задача 3 (дополнительная)

Алгоритм.
1. Просматривая двоичную запись числа справа-налево начиная с нулевого разряда считаем число S – остаток от деления суммы единиц с учетом четности разряда на 3. Таким образом, S- остаток от деления суммы единиц с учетом четности разряда на 3 от нулевого разряда до текущего. И можно считать, что $S\epsilon\{-1,0,1\}$.
2. Считаем остаток от деления S на 3 так, чтобы $S\epsilon\{0,1,2\}$
3. Записываем двоичную запись числа S.

Пример. Найти двоичный остаток от деления числа 1110 на 3.
1110 – это двоичная запись числа 14.
1. Складываем нули и единицы в записи двоичного числа, 1110, начиная с нулевого разряда до текущего с учетом их четности и ищем остаток от деления на 3:
S:=0, S:=S+0=0(mod 3), S:=S-1=-1(mod3), S:=S+1=0(mod3), S:=S-1=-1(mod 3).
2. Считаем остаток от деления S на 3 так, чтобы $S\epsilon\{0,1,2\}$: S=2(mod 3).
3. Находим двоичную запись числа S=2, т.е. 10.
Ответ: **10**.

Задача 3 (дополнительная)

Построить конечный (детерминированный) трансдьюсер, который по двоичному числу находит остаток от деления этого числа на 3 и записывает его в двоичном виде



Распознает рациональное отношение на бинарных словах:
второе слово является остатком от деления первого слова на 3

Детерминированный трансдьюсер

Задача 3 (дополнительная)

Построить конечный (детерминированный) трансдьюсер, который по двоичному числу находит остаток от деления этого числа на 3 и записывает его в двоичном виде

Пояснения к задаче 3.

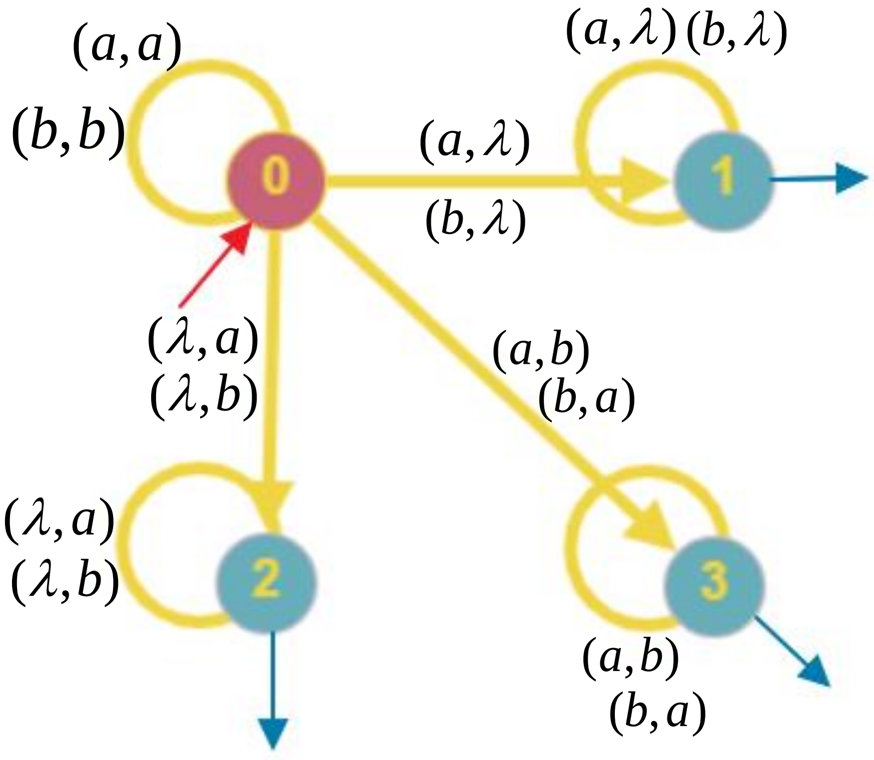
Первый символ вершины – это число S, а второй – четность разряда.

Например, для двоичной записи 1110 числа 14, имеем путь

$$\lambda \text{Ч} \xrightarrow{(0|\lambda)} 0\text{Н} \xrightarrow{(1,\lambda)} -1\text{Ч} \xrightarrow{(1|\lambda)} 0\text{Н} \xrightarrow{(1|\lambda)} -1\text{Ч} \xrightarrow{(\lambda|1)} 1 \xrightarrow{(\lambda|0)} 0$$

Задача 4 (дополнительная)

Построить недетерминированный трансдьюсер, отображающий слово во множество ему неравных слов (различающий отношение неравенства слов) над алфавитом {a,b}.



Недетерминированный трансдьюсер

Распознает рациональное отношение на словах: неравенство слов.

Пояснения к задаче 5. Трансдьюсер пробегая слово ***u*,** записывает по нему слово ***v*.**

Слово ***u*** не равно слову ***v***, если

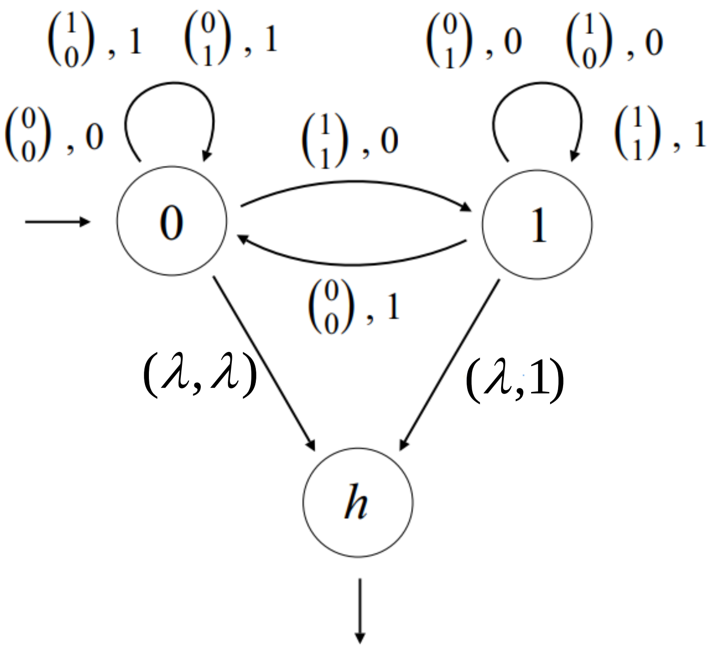
- длина слова ***u*** больше длины слова ***v*** (путь 0->1);
- длина слова ***v*** больше длины слова ***u*** (путь 0->2);
- слова ***u*,*v*** различаются хотя бы в одной позиции (путь 1->2).

Задача 5 (дополнительная)

Построить детерминированный трансдьюсер, складывающий два бинарных слова, записанных в обратном порядке.

Пример взят из монографии Juhani Karhum¨aki. Automata and Formal Language

Распознает рациональное отношение ***(u,v)~w*** для бинарных слов ***u,v,w,*** *записанных в обратном порядке:*
(u,v)~w тогда и только тогда, когда ***u+v=w.***



Детерминированный трансдьюсер

Пояснения к задаче 6. $\Sigma_1 = \{0,1\}^2, \Sigma_2 = \{0,1\}.$

Складываем бинарные слова столбиком, но только не справа налево, а слева направо, поскольку они у нас записаны в обратном порядке.

В текущем положении (разряде)

- у первого и второго слова два нуля – двигаемся по петле на вершине 0, в текущую позицию суммы бинарных чисел пишем 0.
- у первого и второго слова у одного слова 1, а другого 0 – двигаемся по петле на вершине 0, в текущую позицию суммы пишем 1.

(Если слово закончилось (путь 0->h) – ничего не пишем и выходим).

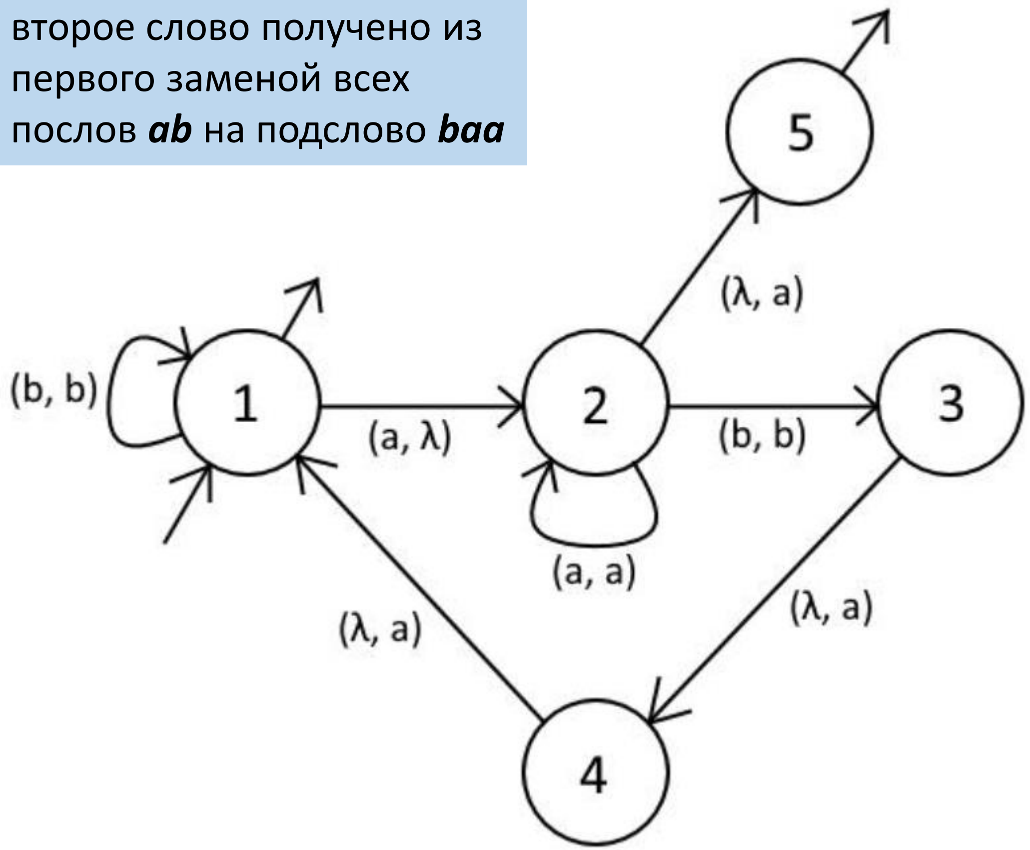
- у первого и второго словав две единицы (путь 0->1). Тогда в текущий разряд пишем 0, а единицу запоминаем и прибавляем к результату сложения в следующем разряде: петля на вершине 1 и путь 1->0, если слово не закончилось на данном разряде, и путь 1->h, если закончилось.

Задача 10 (а,б,в) (основные)

10. Построить конечный трансдьюсер
а) заменяющий в слове над алфавитом $\{a, b\}$ все вхождения подслова ab на baa;
б) заменяющий в слове над алфавитом $\{0, 1\}$ любую последовательность из чётного числа единиц на одну единицу;
в) переставляющий в слове над алфавитом $\{a, b\}$ первую букву в конец;

Задача 10 а)

Распознает отношение: второе слово получено из первого заменой всех послов ***ab*** на подслово ***baa***



Детерминированный трансдьюсер

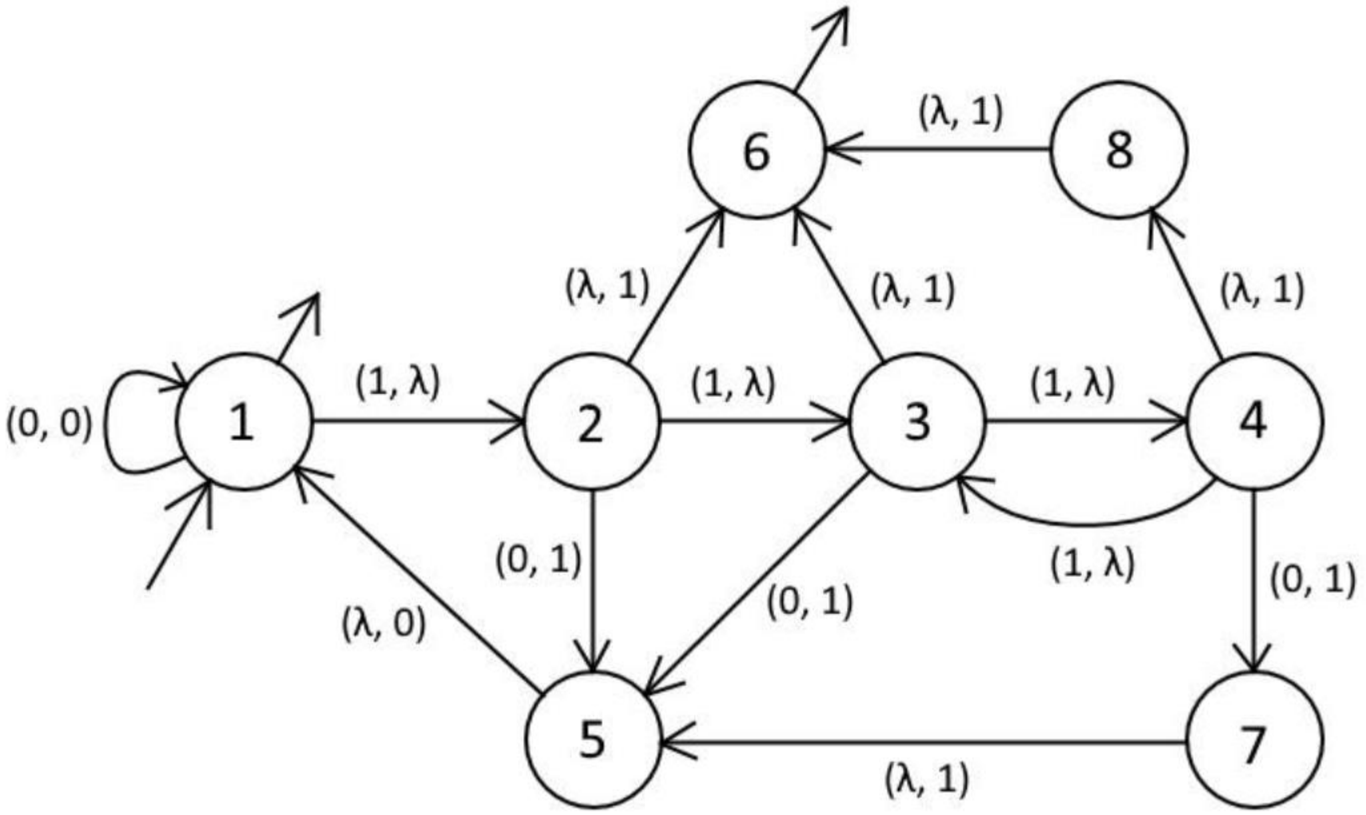
Пояснения к задаче 10 а)

Копируем все идущие подряд буквы ***b*** в начале слова (петля на вершине 1). Если слово представляет степень буквы ***b,*** то выходим, скопировав исходное слово.

Иначе дальше в слове есть хотя бы одна буква с ***a***. Стираем букву ***a*** (2->5). Если в слове больше не встретится буква ***b,*** копируем все идущие подряд буквы ***a*** до конца слова, восстанавливаем первую стертую букву ***a*** и выходим (петля на вершине 2, путь 2-5). Таким образом, мы просто скопировали исходное слово.

В оставшемся случае слово представляет собой сначала степень (возможно, нулевую) буквы ***b*** (петля на вершине 1), которую мы уже скопировали, потом букву ***a***, которую уже стерли (1->2), потом сначала степень (возможно, нулевая) буквы ***a*** (петля на вершине 2)**,** которую мы копируем, и дальше идет буква ***b,*** которую мы тоже копируем (2->3). Таким образом, подслово ***ab*** у нас заменилось на слово ***b.*** Наконец, нужно дописать две буквы ***a*** (3->4->1). Тогда подслово ***ab*** в исходном слове заменится на подслово ***baa*** **.** И необходимо вернуться в начальную вершину 1, чтобы дальше просматривать исходное слово.

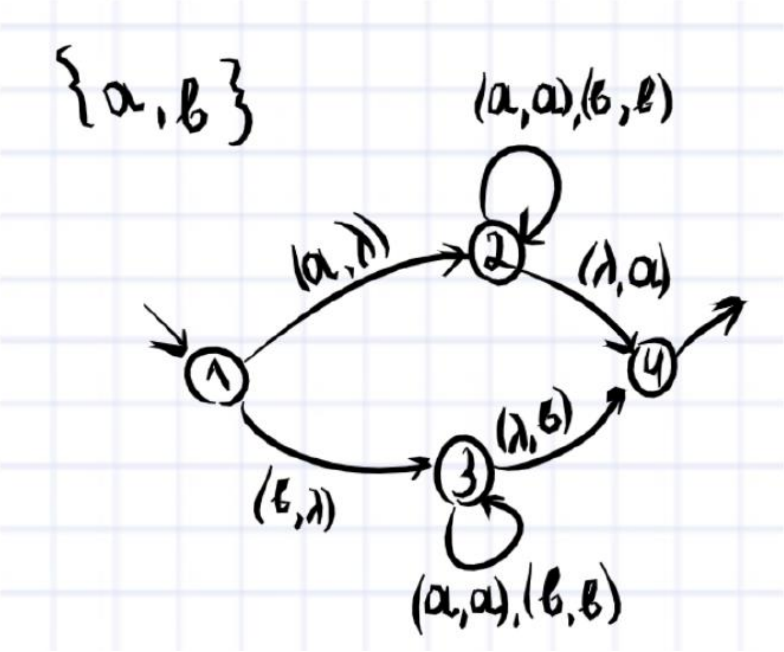
Задача 10 б)



Детерминированный трансдьюсер

Пояснения к 10 б). Всего возможно три случая последовательности единичек: одна единица - возвращаем 1 (состояние 2), четное количество единиц - возвращаем 1 (состояние 3), нечетное кол-во единиц, больше 1 - возвращаем 11 (состояние 4). Под каждый случай необходим выход либо при встрече нуля - состояние 1, либо конца слова - состояние 6 (переходы по лямбде).

Задача 10 в)



Детерминированный трансдьюсер

Распознает рациональное отношение: второе слово получено из первого перестановкой первой буквы в конец слова

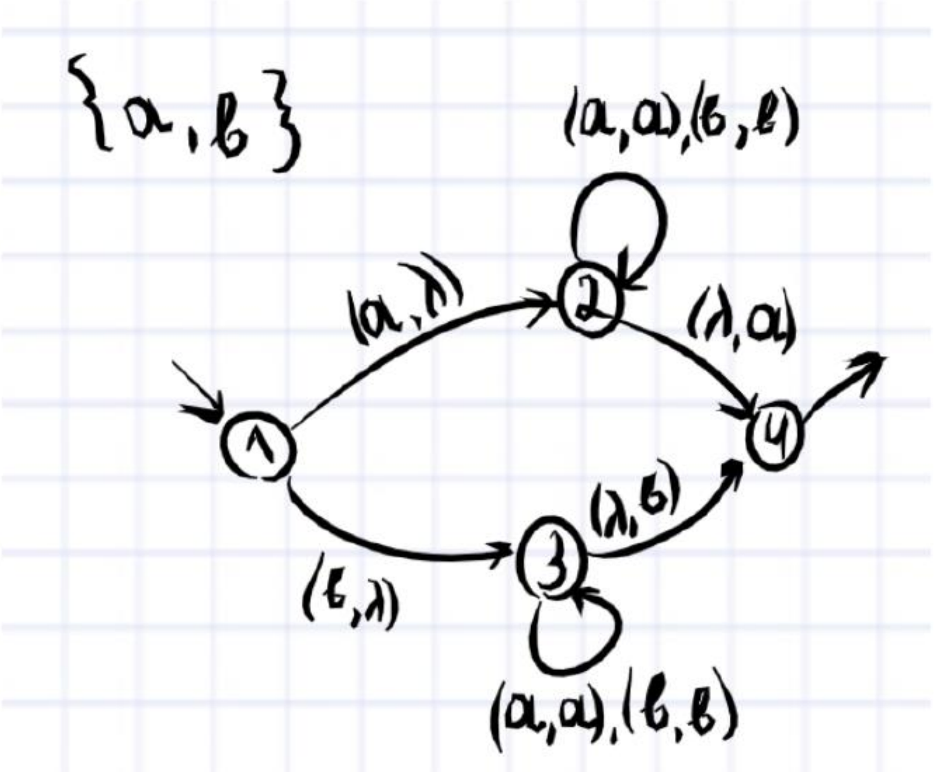
Пояснения к 10 в). Две ветки графа трансдьюсера необходимы для того, чтобы отследить, с какой буквы начинается исходное слово.

1) Ветка 1->2 (петля на 2)->4: слово начинается с буквы ***a.***
2) Ветка 1->3 (петля на 3)->4: слово начинается с буквы ***b.***

В 1)-м случае стираем первую букву ***a*** (путь 1->2). Затем, копируем каждую букву до конца слова (петля на вершине 2). Наконец, дописываем стертую вначале букву ***a*** в конец слова (путь 2->4).

2)-й случай совершенно аналогичен.

Задача 10 в) (комментарии ст-та Зарипова В.)



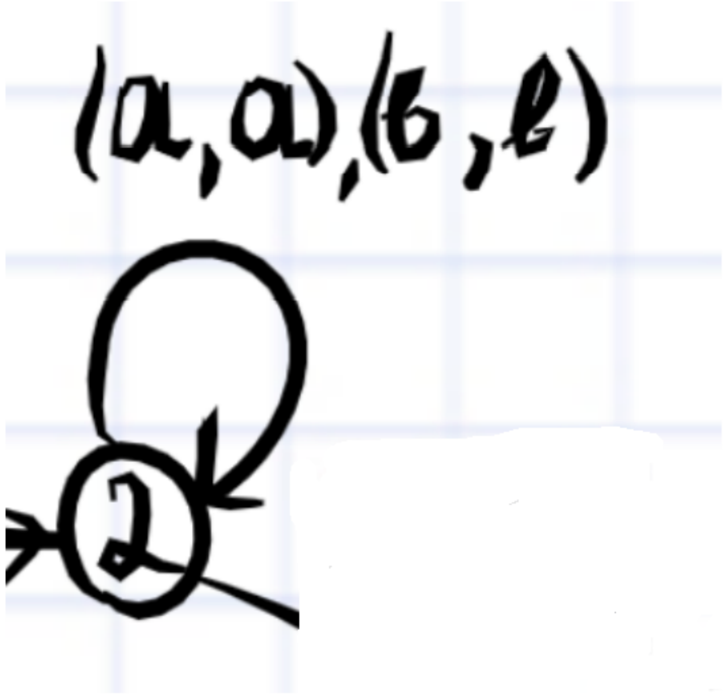
Распознает рациональное отношение:
второе слово получено из первого
перестановкой первой буквы в конец слова

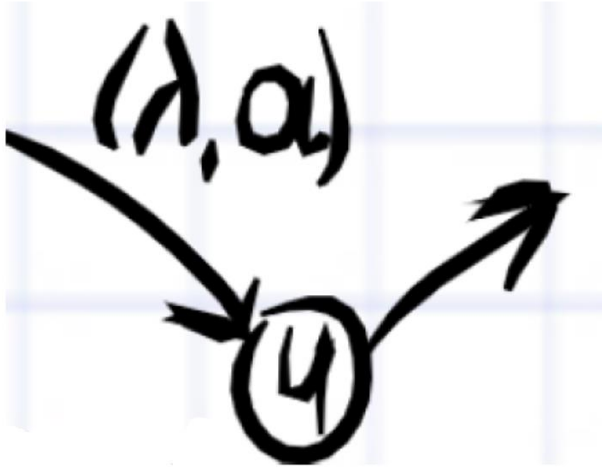
Алгоритм: ({a, b} - начальный $\sum_1$ и конечный $\sum_2$ алфавиты)

1. Т.к. для разных букв алфавита, должны переставлять соответствующую букву в конец, то построим автомат, так, чтобы из стартовой вершины он по разным буквам переходил в разные состояния.
2. Дальше делаем переходы, которые копируют остальную часть входного слова в выходное.

Детерминированный
трансдьюсер

Задача 10 в)

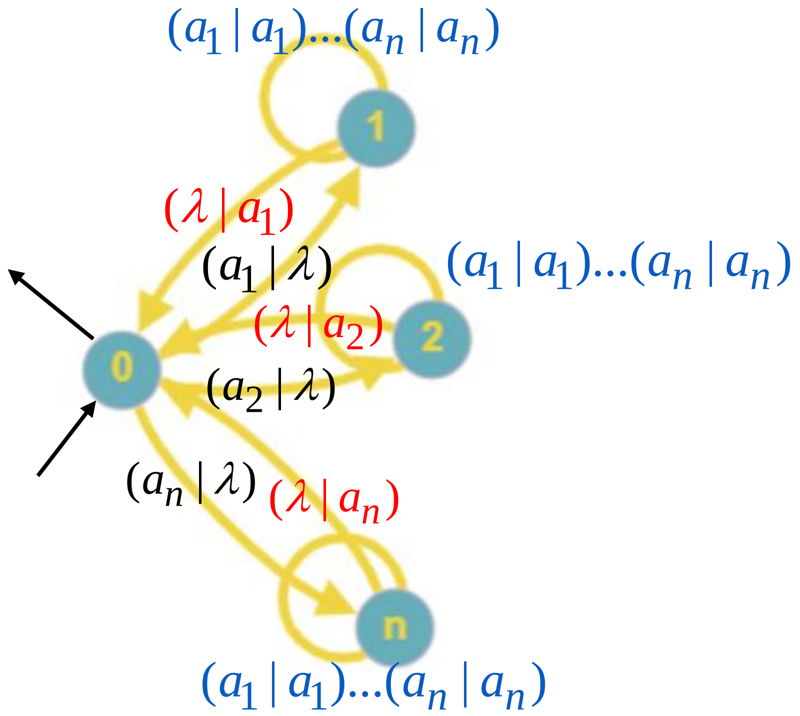




3. Осталось добавить первую букву в конец, поэтому по пустому слову(λ) переходим в финальную вершину, при это в выходное слово записываем соответствующую букву.

Задача 6 (дополнительная).

Построить конечный трансдьюсер, распознающее отношение: слово *v* является циклической перестановкой слова *u*.



Пояснения к задаче 5.
Стираем первую букву, затем идем до конца слова, копируя букву за буквой, а затем дописываем в конец слова эту же букву. Далее можем снова стереть вторую букву, а затем дописать ее в конец слова и т. д.

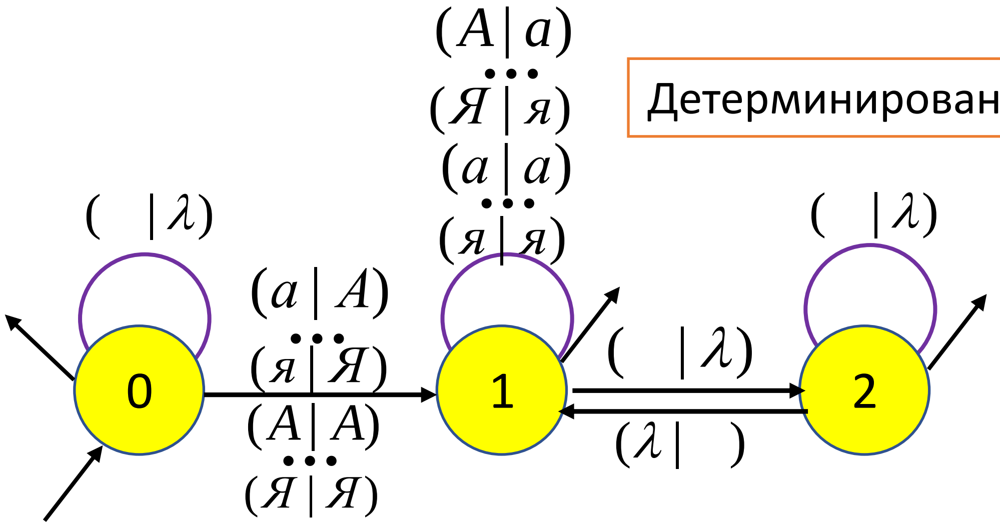
Распознает рациональное отношение: второе слово *v* является циклической перестановкой слова *u*.

Недетерминированный трансдьюсер

Задача 7 (дополнительная)

Построить конечный (детерминированный) трансдьюсер, осуществляющий следующее частичное форматирование предложения (используется русский алфавит со строчными и заглавными буквами и пробел):

1) предложение должно начинаться с заглавной буквы;
2) внутри предложения используются только строчные буквы;
3) между словами в предложении должен быть ровно один пробел;
4) в конце предложения допускается один пробел.



Детерминированный трансдьюсер

Распознает рациональное отношение: второе слово *v* – второе предложение является отформатированным первым предложением – словом *u*.

Пояснения к задаче 8.

Вначале предложения стираем все пробелы (петля на вершине 0).

Первую букву предложения делаем заглавной (0->1).

Пробегаем первое слово предложения –копируя букву за буквой, заглавные буквы делая строчными (петля на вершине 1).

Стираем все пробелы после первого слова (1->2). Теперь можем перейти к следующему слову.

Ставим пробел после первого слова (2->1) и копируем следующее слово (петля на вершине 1).