

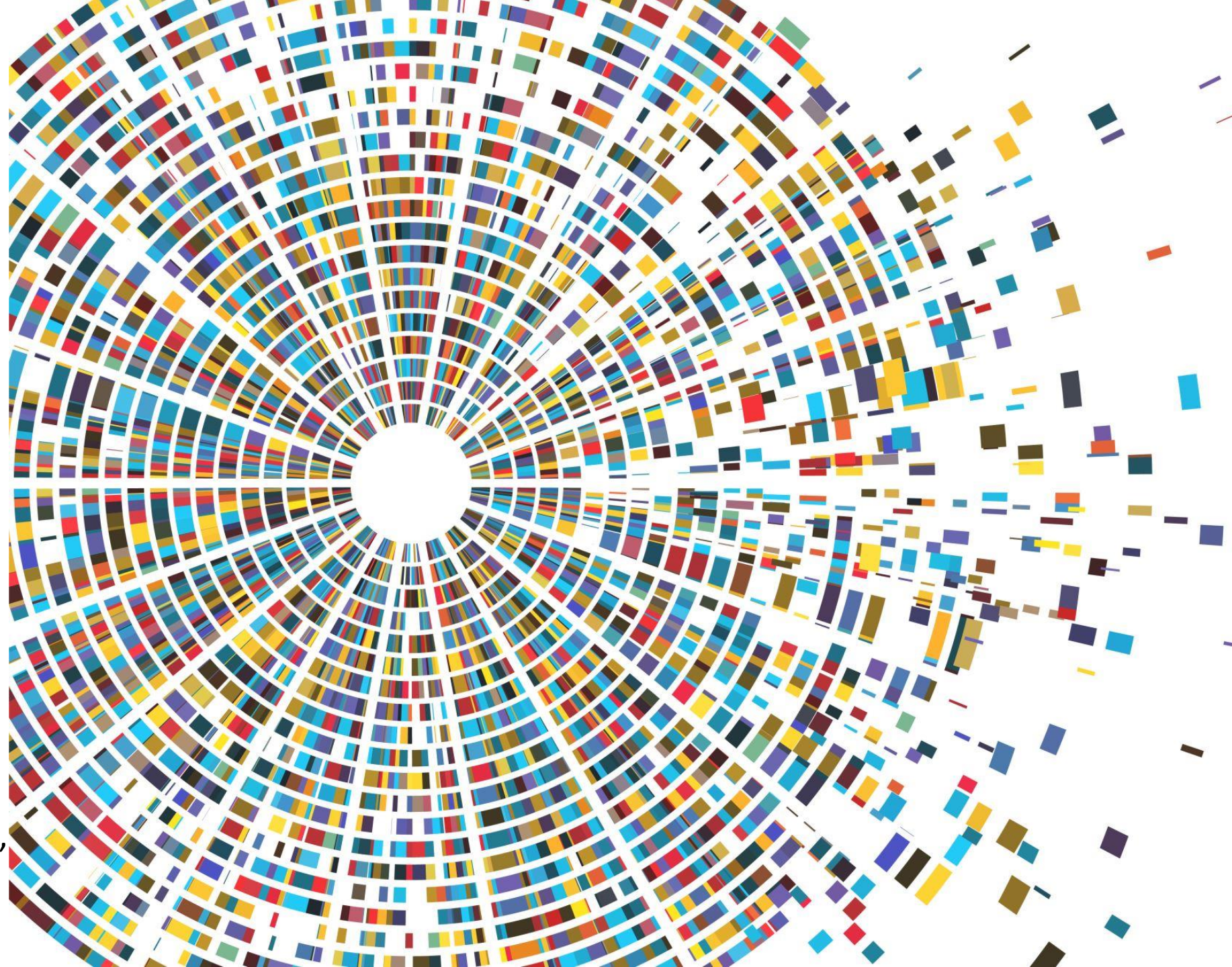
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Решенный
тренировочный
вариант
контрольной
работы
Задача 9

Направл.: Математика и
компьютерные науки

к.ф.-м.н., доцент
Нагребецкая Ю.В.

Участвовали в проекте
студенты КН-II Василько Е.,
Нечуговских А.



Основные определения

Моноидом $\langle M(A); \circ \rangle$ автомата A называется множество $M(A) = \{t_w \mid w \in \Sigma^*\}$ преобразований множества Q состояний этого автомата относительно суперпозиции $\circ$ отображений. Здесь t_w - преобразование множества Q состояний автомата, которое каждому состоянию q сопоставляет состояние $q.w$.

Нейтральным элементом моноида является преобразование t_λ .

Итак, $\langle M(A); \circ \rangle$ — моноид автомата A

Алгоритм поиска $\langle M(A); \circ \rangle$

Алгоритм поиска моноида $M(A)$:

Сначала полагаем $S := \{t_\lambda, t_a, t_b\}$.

Перебираем все двухбуквенные слова $w \in \Sigma^*$ и находим среди них такие, что $t_w \notin S$. И полагаем для них $S := S \cup \{t_w\}$.

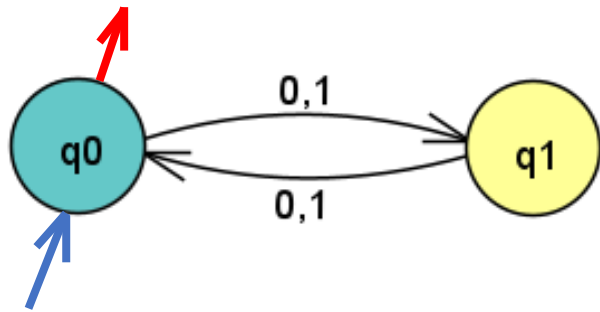
Потом тоже самое проделываем с трехбуквенными, четырехбуквенными словами $w \in \Sigma^*$ и т.д.

Наконец, для некоторого $k \geq 2$ для всех k -буквенных слов $w \in \Sigma^*$ преобразования t_w окажутся во множестве S .

Тогда $M(A) = S$.

Задача 1 (вспомогательная)

Построить моноид переходов автомата A , распознающего двоичные слова чётной длины $((0 + 1)^2)^*$



Элементы моноида переходов

$\circ$	q_0	q_1
λ	q_0	q_1
0	q_1	q_0
1	q_1	q_0
0^2	q_0	q_1
01	q_0	q_1

Таблица Кэли
для моноида $\langle M(A), \circ \rangle$

$\circ$	t_λ	t_0
t_λ	t_λ	t_0
t_0	t_0	t_λ

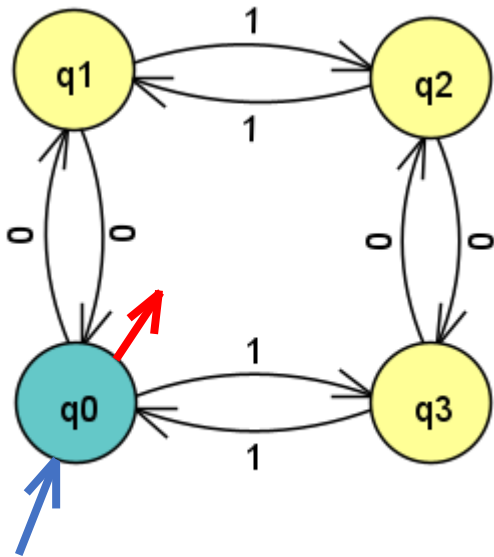
Очевидно, что моноид $\langle M(A), \circ \rangle$ является **циклической группой** C_2 порядка 2 с порождающим t_0 .

$$t_1 = t_0 \quad t_{0^2} = t_\lambda \Rightarrow$$

$$t_{10} = t_{10} = t_{1^2} = t_{0^2} = t_\lambda \Rightarrow$$
$$M(A) = \{t_\lambda, t_0\}$$

Задача 2

Построить моноид переходов автомата А, распознающего двоичные слова с чётным числом нулей и единиц



Элементы моноида переходов

$t_1 = t_0$						
	$\circ$	q_0	q_1	q_2	q_3	
$\rightarrow$	λ	q_0	q_1	q_2	q_3	
$\rightarrow$	0	q_1	q_0	q_3	q_2	
$\rightarrow$	1	q_3	q_2	q_1	q_0	
	0^2	q_0	q_1	q_2	q_3	$t_{0^2} = t_\lambda$
	1^2	q_0	q_1	q_2	q_3	$t_{1^2} = t_\lambda$
$\rightarrow$	01	q_2	q_3	q_0	q_1	
	10	q_2	q_3	q_0	q_1	$t_{10} = t_{01}$

$$\Rightarrow t_{000} = t_{0^2} \circ t_0 = t_\lambda \circ t_0 = t_0$$

$$t_{001} = t_{0^2} \circ t_1 = t_\lambda \circ t_1 = t_1$$

$$t_{010} = t_{100} = t_{001} = t_1$$

$$t_{011} = t_{101} = t_{110} = t_{1^2} \circ t_0 = t_0$$

$$t_{111} = t_{101} = t_{110} = t_{1^2} \circ t_0 = t_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{M(A)} = \{t_\lambda, t_0, t_1, t_{01}\}$$

Задача 2

Таблица Кэли для моноида $\langle M(A), \circ \rangle$

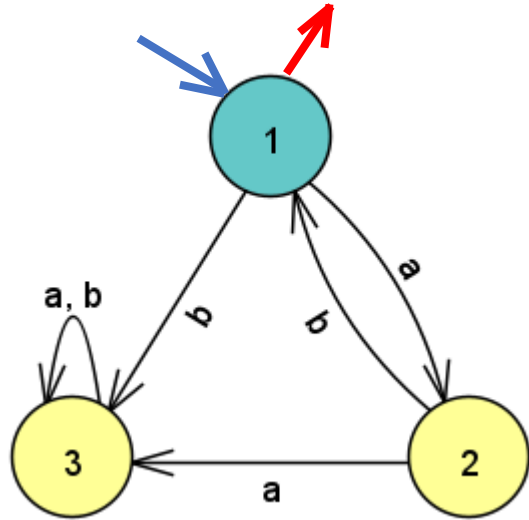
$$M(A) = \{t_\lambda, t_0, t_1, t_{01}\}$$

$\circ$	t_λ	t_0	t_1	t_{01}
t_λ	t_λ	t_0	t_1	t_{01}
t_0	t_0	t_λ	t_{01}	t_1
t_1	t_1	t_{01}	t_λ	t_0
t_{01}	t_{01}	t_1	t_0	t_λ

Очевидно, что моноид $\langle M(A), \circ \rangle$
является декартовым
произведением **циклических групп**
 $C_2 \times C_2$ порядка 2 с порождающим
 $t_{01} = t_{10} = t_0 \circ t_1 = t_1 \circ t_0$.

Задача 3

Построить моноид переходов данного автомата A



Элементы моноида переходов

$$M(A) = \{t_\lambda, t_a, t_b, t_{a^2}, t_{ab}, t_{ba}\}$$

$\circ$	1	2	3
λ	1	2	3
a	2	3	3
b	3	1	3
a^2	3	3	3
ab	1	3	3
ba	3	2	3
b^2	3	3	3
aba	2	3	3
bab	3	1	3

$= \Theta$

$$t_{b^2} = t_{a^2} = \Theta$$

$$t_{aba} = t_a$$

$$t_{bab} = t_b$$

Θ — нуль моноида

$$t_w \circ \Theta = \Theta \circ t_w = \Theta, w \in \Sigma^*$$

Итак, $t_{b^2} = t_{a^2} = \Theta, t_{aba} = t_a, t_{bab} = t_b$

Кроме того, $t_{aaa} = t_{a^2} \circ t_a = \Theta \circ t_a = \Theta, t_{aab} = t_{a^2} \circ t_b = \Theta \circ t_w = \Theta$

$t_{bba} = t_{b^2} \circ t_a = \Theta \circ t_a = \Theta, t_{bbb} = t_{b^2} \circ t_b = \Theta \circ t_b = \Theta,$

$t_{baa} = t_b \circ t_{a^2} = t_b \circ \Theta = \Theta, t_{abb} = t_a \circ t_{b^2} = t_a \circ \Theta = \Theta$

Задача 3

Построить моноид переходов данного автомата A

Таблица Кэли
для моноида $\langle M(A), \circ \rangle$

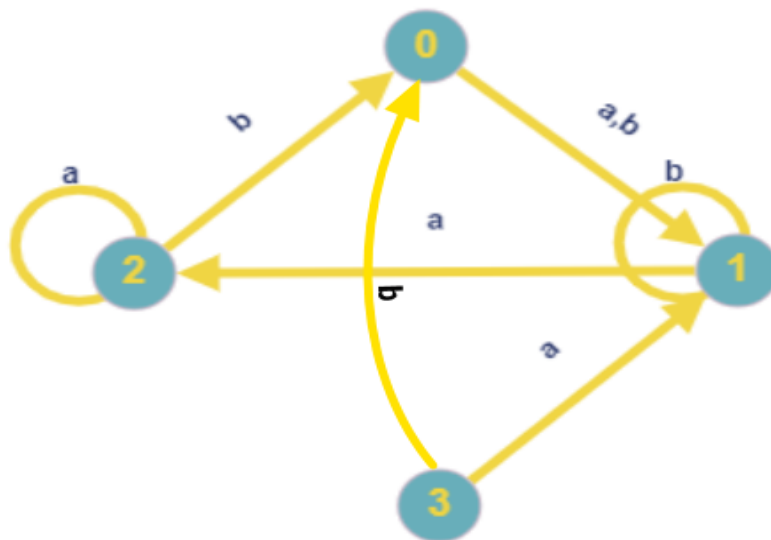
$\circ$	t_λ	t_a	t_b	t_{ab}	t_{ba}	Θ
t_λ	t_λ	t_a	t_b	t_{ab}	t_{ba}	Θ
t_a	t_a	Θ	t_{ab}	Θ	t_a	Θ
t_b	t_b	t_{ba}	Θ	t_b	Θ	Θ
t_{ab}	t_{ab}	t_a	Θ	t_{ab}	Θ	Θ
t_{ba}	t_{ba}	Θ	t_b	Θ	t_{ba}	Θ
Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ

$$\Rightarrow M(A) = \{t_\lambda, t_a, t_b, t_{a^2}, t_{ab}, t_{ba}\}$$

$$\begin{aligned} t_{b^2} &= t_{a^2} = \Theta - \text{нуль моноида,} \\ t_{aba} &= t_a, t_{bab} = t_b, \\ (t_{ab})^2 &= t_{ab}, (t_{ba})^2 = t_{ba}. \end{aligned}$$

Задача 4*

Построить моноид переходов
данного автомата A



$M(A) =$

$= \{t_\lambda, t_a, t_b, t_{a^2}, t_{b^2}, t_{ab}, t_{ba}, t_{a^2}, t_{aba}, t_{bab}, t_{abab}, t_{baba}\}$

$t_{a^2} = \Theta_1, t_{b^2} = \Theta_2$ - правые (не левые) нули моноида,

$\Theta_1 \neq \Theta_2, \Theta_1 \cdot t = \Theta_1, \Theta_2 \cdot t = \Theta_2, t \cdot \Theta_1 \neq \Theta_1, t \cdot \Theta_2 \neq \Theta_2,$

$t_{a^2b} = \Theta_3$ - правый (не левый) нуль моноида,

$\Theta_3 \neq \Theta_1, \Theta_3 \neq \Theta_2, \Theta_3 \cdot t = \Theta_3, t \cdot \Theta_3 \neq \Theta_3,$

$t_{a^2} = t_{a^n}, t_{b^2} = t_{b^m}, t_{ba^2} = t_{a^2}, t_{a^2ba} = t_{b^2}, t_{ababa} = t_a,$

$t_{babab} = t_a.$

0	q_0	q_1	q_2	q_3
λ	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_2	q_2	q_1
b	q_1	q_1	q_0	q_0
a^2	q_2	q_2	q_2	q_2
ab	q_1	q_0	q_0	q_1
ba	q_2	q_2	q_1	q_1
b^2	q_1	q_1	q_1	q_1
a^3	q_2	q_2	q_2	q_2
a^2b	q_0	q_0	q_0	q_0
aba	q_2	q_1	q_1	q_2
ab^2	q_1	q_1	q_1	q_1
ba^2	q_2	q_2	q_2	q_2
bab	q_0	q_0	q_1	q_1
b^2a	q_2	q_2	q_2	q_2
b^3	q_1	q_1	q_1	q_1
a^2ba	q_1	q_1	q_1	q_1
$abab$	q_0	q_1	q_1	q_0
$baba$	q_1	q_1	q_2	q_2
$ababa$	q_1	q_2	q_2	q_1
$babab$	q_1	q_1	q_0	q_0

Задача 4

Построить таблицу Кэли данного автомата A

$\emptyset$	ta	tb	ta^2	tab	tba	tb^2	ta^2b	$taba$	$tbab$	$tatbab$	$tbaaba$
ta	ta	ta^2	ta^2	ta^2b	ta^2	tb^2	ta^2b	ta^2	ta^2b	tb^2	tb^2
tb	tb	tba	tb^2	tba	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2
ta^2	ta^2	ta^2	ta^2b	ta^2	ta^2b	tb^2	ta^2b	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2
tab	tab	$taba$	tb^2	ta^2	ta^2b	tb^2	ta^2b	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2
tba	tba	ta^2	tba	ta^2	ta^2b	tb^2	ta^2b	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2
tb^2	tb^2	ta^2	tb^2	ta^2	ta^2b	tb^2	ta^2b	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2
ta^2b	ta^2b	tb^2	tb^2	ta^2	tb^2	tb^2	ta^2b	ta^2	ta^2b	ta^2b	tb^2
$taba$	$taba$	ta^2	$tatab$	ta^2	ta^2b	tb^2	ta^2b	tb^2	tb^2	tb^2	tb^2
$tbab$	$tbab$	tba	tb^2	ta^2	tb^2	tb^2	ta^2b	tba	ta^2b	tba	tb^2
$tatbab$	$tatbab$	ta	tb^2	ta^2	tab	tb^2	ta^2b	$taba$	ta^2b	$tatab$	tb^2
$tbaaba$	$tbaaba$	ta^2	tb	ta^2	ta^2b	tb^2	ta^2b	tb^2	tba	tb^2	$tbaaba$