ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ
Решение тренировочного варианта контрольной работы. Задача 7

Презентация сделана на основе ЛЕКЦИИ
д. ф.-м. н., проф. М.В. Волкова

Направл.: Математика и компьютерные науки

к.ф.-м.н., доцент
Нагребецкая Ю.В.

В проекте участвовали студенты КН-II

Вахитов Э., Корватовская С.

Определение синхронизируемого автомата и основные результаты

<u>Определение.</u> Автомат называется синхронизируемым, если найдется такое (синхронизирующее) слово $\boldsymbol{w}$ из Σ^*и вершина $\boldsymbol{r}$ из Q,
что для любой вершины q из Q выполняется $\boldsymbol{q.w=r}$.

<u>Теорема 1</u>. Автомат является синхронизируемым тогда и только тогда,
когда для любых вершин q, q' из Q найдется такое
слово $\boldsymbol{u}$ (не обязательно одно на все пары), что выполняется $\boldsymbol{q.u=q'.u}$

Определение синхронизируемого автомата и основные результаты

Дополним исходный автомат «двухэлементными вершинами» $\{q, q'\}$ и соответствующими дугами: $\{q, q'\}.c = \{q.c, q'.c\}$ для любой буквы c из Σ.

Теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1` Автомат является синхронизируемым тогда и только тогда, когда КАЖДАЯ «двухэлементная» вершина переводится НЕКОТОРЫМ словом (a priori не обязательно одним и тем же для любой двухэлементной вершины) в НЕКОТОРУЮ «одноэлементную».

Определение синхронизируемого автомата и основные результаты

<u>Теорема 2.</u> Автомат является синхронизируемым тогда и только тогда, когда найдется такое (синхронизирующее) слово w, которое переводит КАЖДУЮ «двухэлементную вершину» в НЕКОТОРУЮ «одноэлементную» ($\{q, q'\}.w$= $\{q.w\} = \{q'.w\}$) (а priori не обязательно, что все двухэлементные переводятся словом w в одну и ту же «одноэлементную» вершину).

<u>Доказательство теоремы 2</u>.
Из определения синхронизирующего слова очевидным образом следует утверждение теоремы 2.
Если истинно утверждение теоремы 2, то каждая вершина q в паре с фиксированной вершиной q_0 переводится словом w в одну вершину, и этой вершиной может быть только вершина $q_0.w$. Т.о. слово w является синхронизирующим, а автомат синхронизируемым.

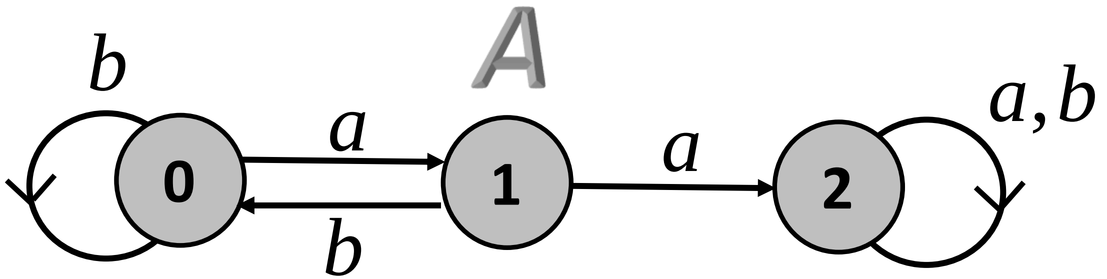
Определение синхронизируемого автомата и основные результаты

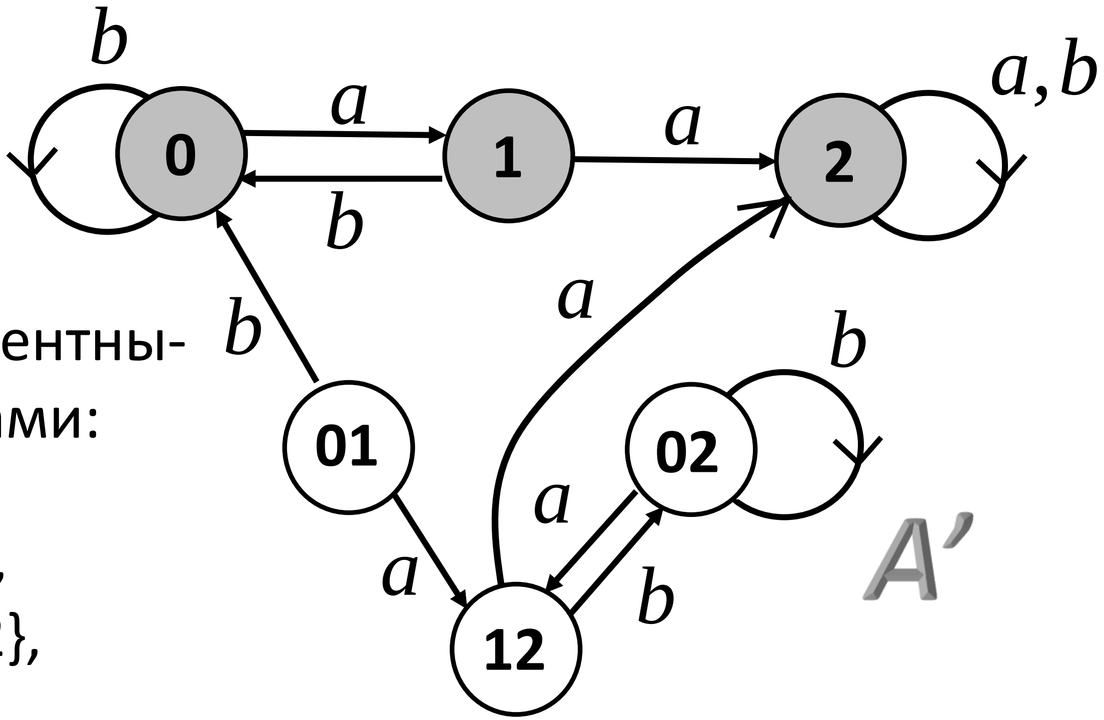
Доказательство теоремы 1.

Из утверждения теоремы 2 очевидным образом следует утверждение теоремы 1` (если найдется слово - одно на все пары вершин, которое переводит каждую пару в одну и ту же вершину, то для каждой пары тем более найдется слово с таким свойством).

Продемонстрируем работу «ЖАДНОГО» алгоритма, основанного на теореме 1`. Из этой демонстрации будет видно, как доказывается, что из теоремы 1` следует теорема 2.

ЗАДАЧА 7. **Для данного автомата построить синхронизирующее слово при помощи жадного алгоритма, затем найти кратчайшее синхронизирующее слово.**

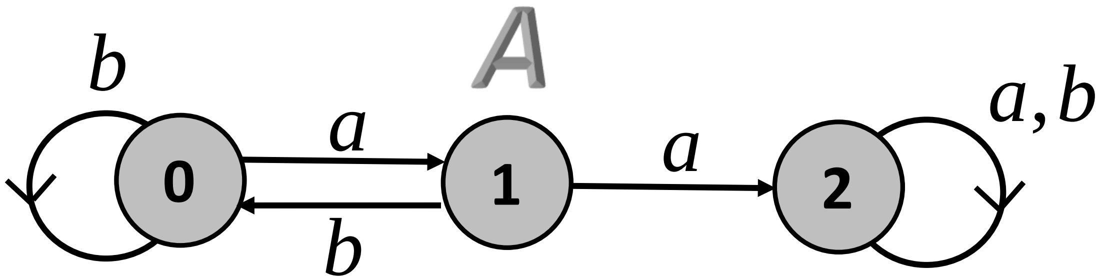


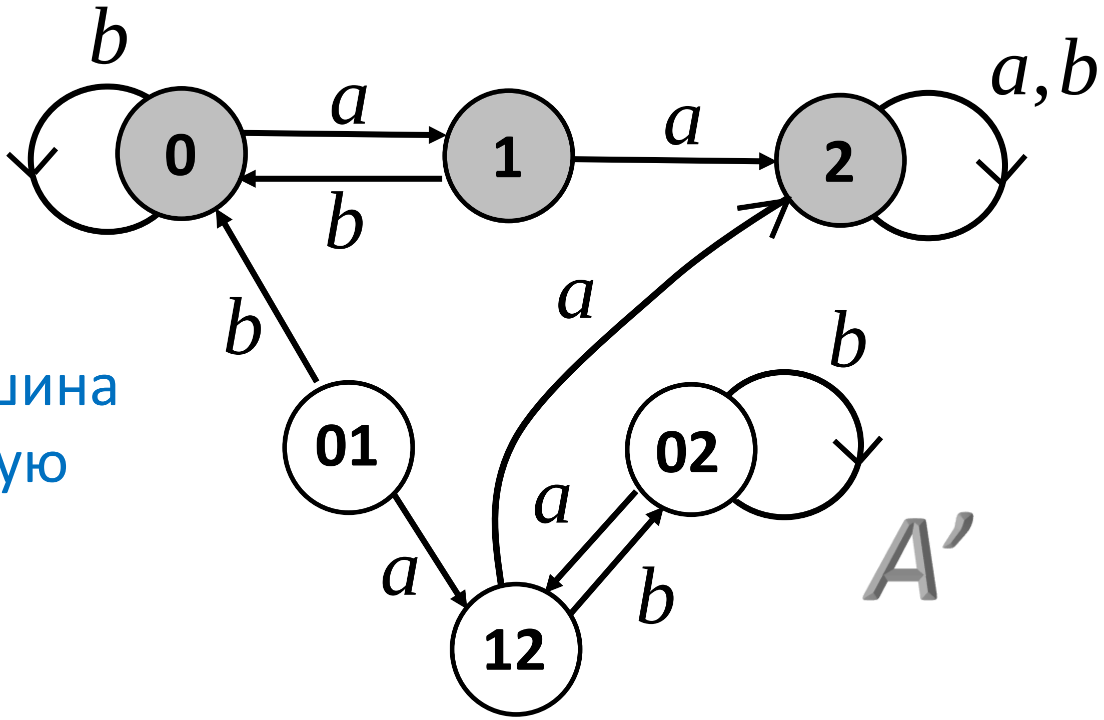


Дополним исходный автомат ***A*** «двухэлементными вершинами» и соответствующими дугами:

{0,1}.*a*={0.*a*, 1.*a*}={1,2}, {0,1}.*b*={0.*b*, 1.*b*}={0},
{0,2}.*a*= {0.*a*,2.*a*}={1,2}, {0,2}.*b*={0.*b*,2.*b*}={0,2},
{1,2}.*a*= {1.*a*,2.*a*}={2}, {1,2}.*b*={1.*b*,2.*b*}={0,2}
Получим автомат ***A'***.

ЗАДАЧА 7. Для данного автомата построить синхронизирующее слово при помощи жадного алгоритма, затем найти кратчайшее синхронизирующее слово.

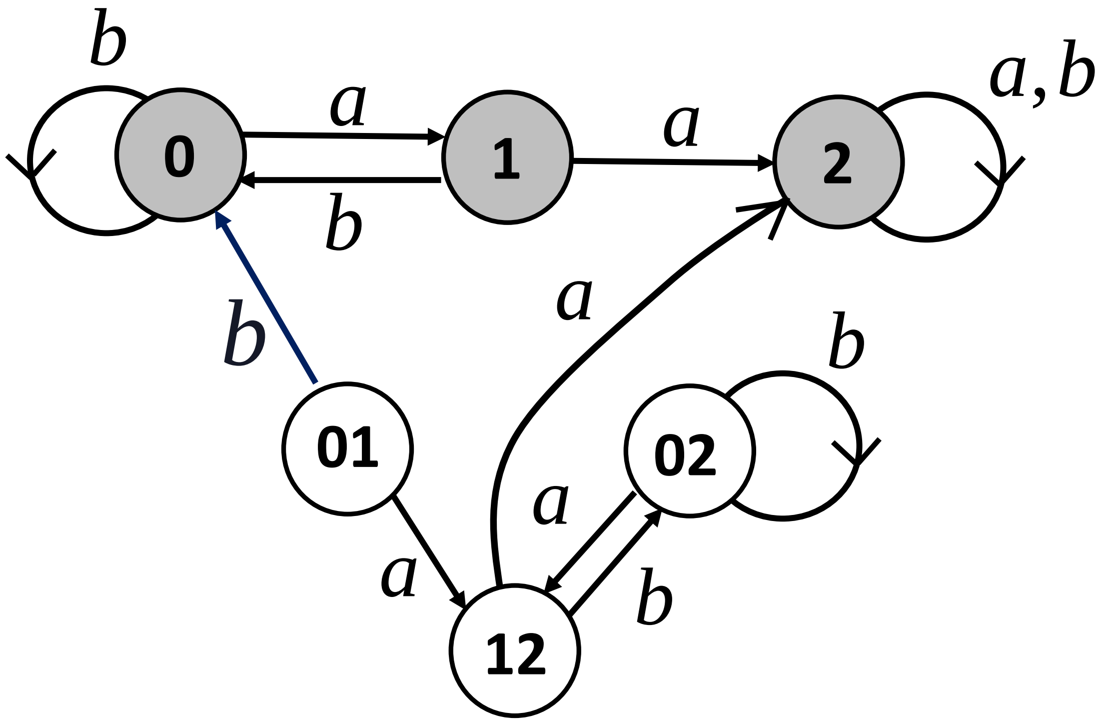




Видно, что каждая «двухэлементная» вершина переводится некоторым словом в некоторую «одноэлементную»:
{0,1}.*b*={0}, {0,2}.*aa*={2}, {1,2}.*a*={2}

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1`.

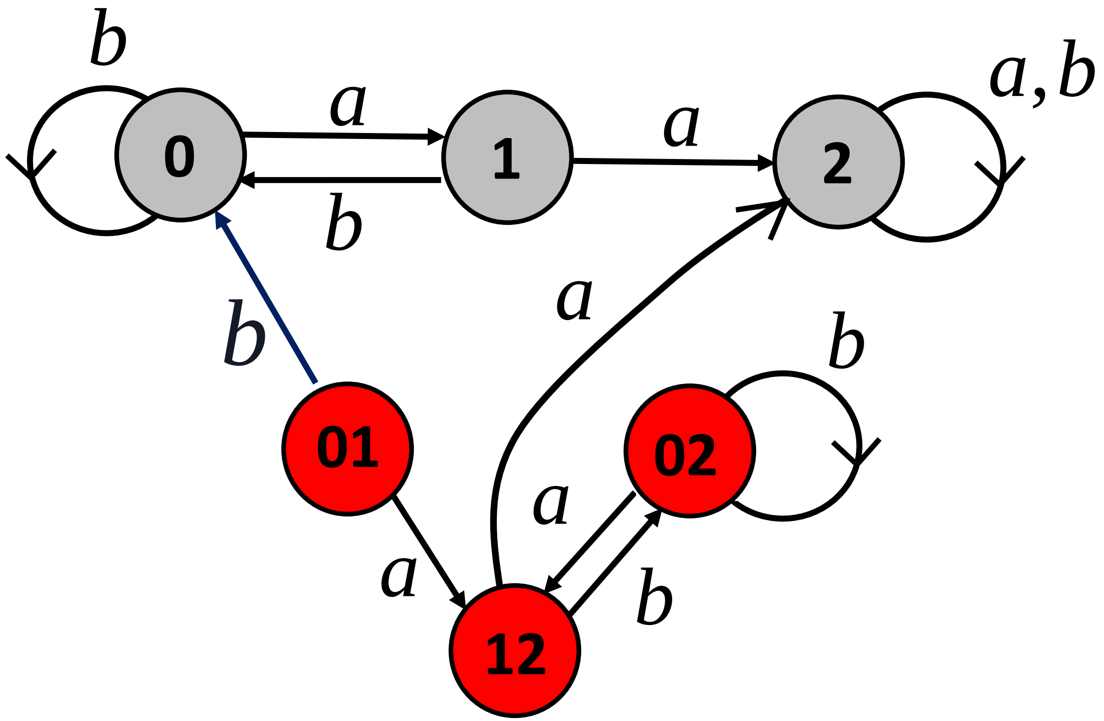
ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизирующего слова



Пусть ***N*** – множество всех «одноэлементных» вершин.

«Ставим красные фишки» на двухэлементные вершины.

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова

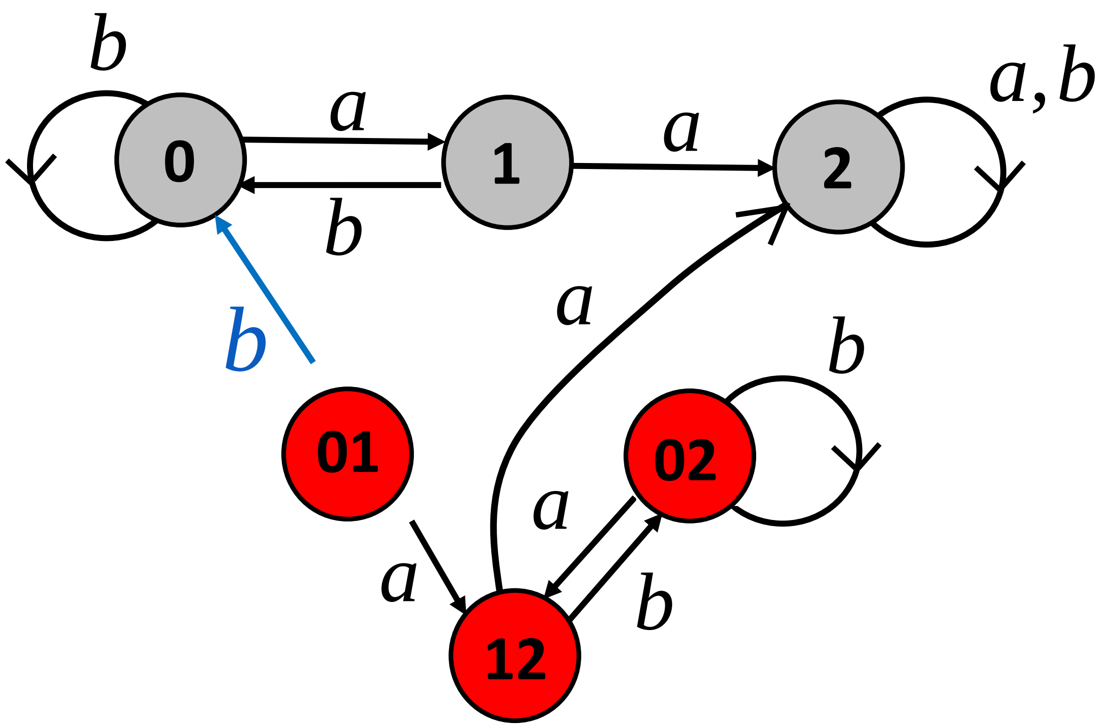


Пусть ***N*** – множество всех «одноэлементных» вершин.

«Ставим красные фишки» на двухэлементные вершины.

Пусть ***M*** – множество всех «двухэлементных» вершин, на которых «стоят красные фишки».

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова



Находим **ближайшую** «красную двухэлементную вершину» (т.е. вершину из множества ***M***) к множеству «одноэлементных» вершин (т.е. к множеству ***N***).

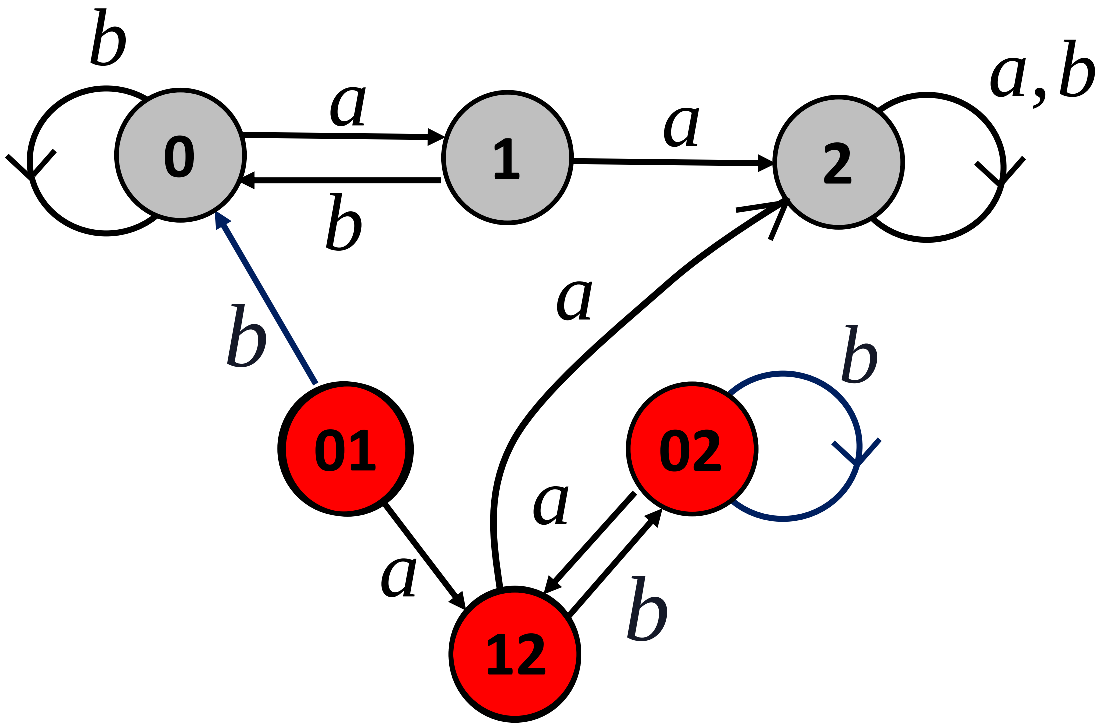
Таких вершин две: {0,1} и {1,2}. *Возьмем вершину* {0,1}.

Кратчайший путь: $\{0,1\} \xrightarrow{b} \{0\}$

Положим $w_1 = b.$

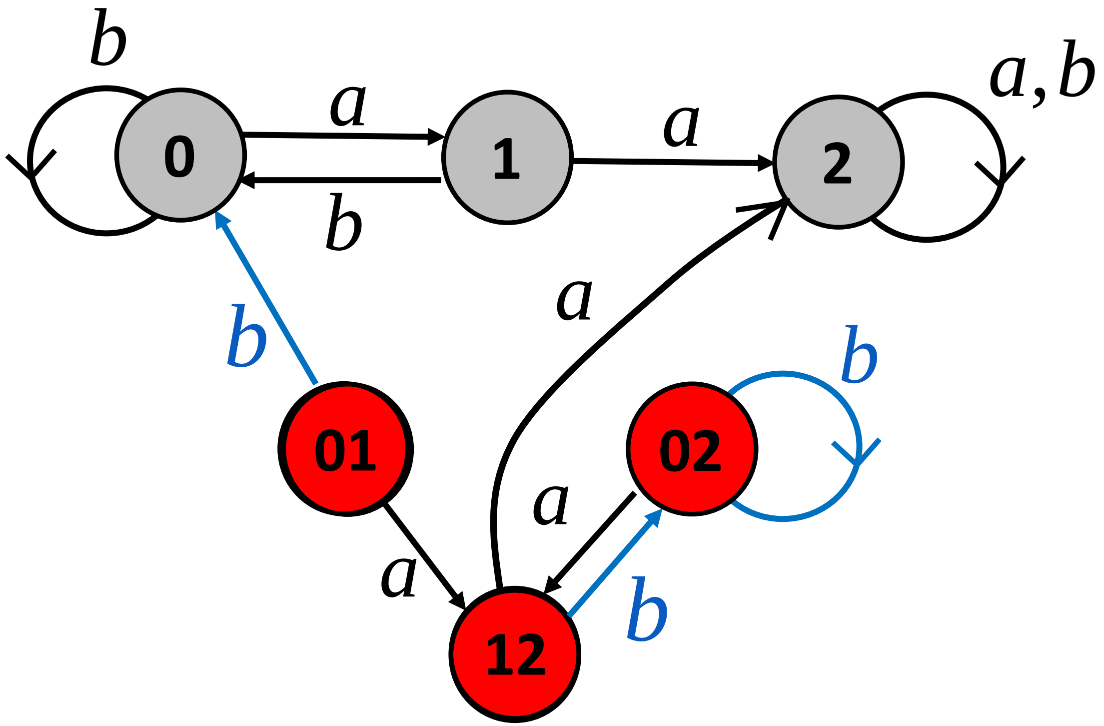
Слово w_1 будет префиксом будущего синхронизирующего слова w.

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова



Подействуем словом w_1 на каждую "красную двуэлементную вершину", т.е. на вершину из множества ***M***.

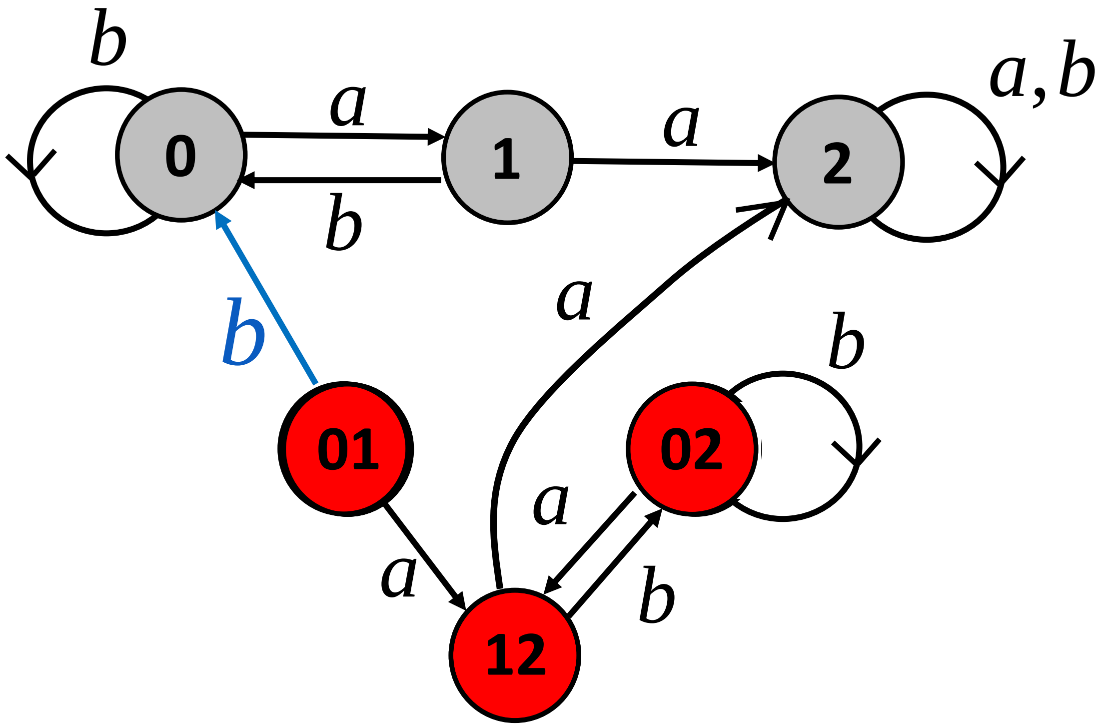
ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова



Подействуем словом w_1 на каждую "красную двуэлементную вершину", т.е. на вершину из множества ***M***.

$\{0,1\}.\,w_1 = \{0\},$
$\{0,2\}.\,w_1 = \{0,2\},$
$\{1,2\}.\,w_1 = \{0,2\}$

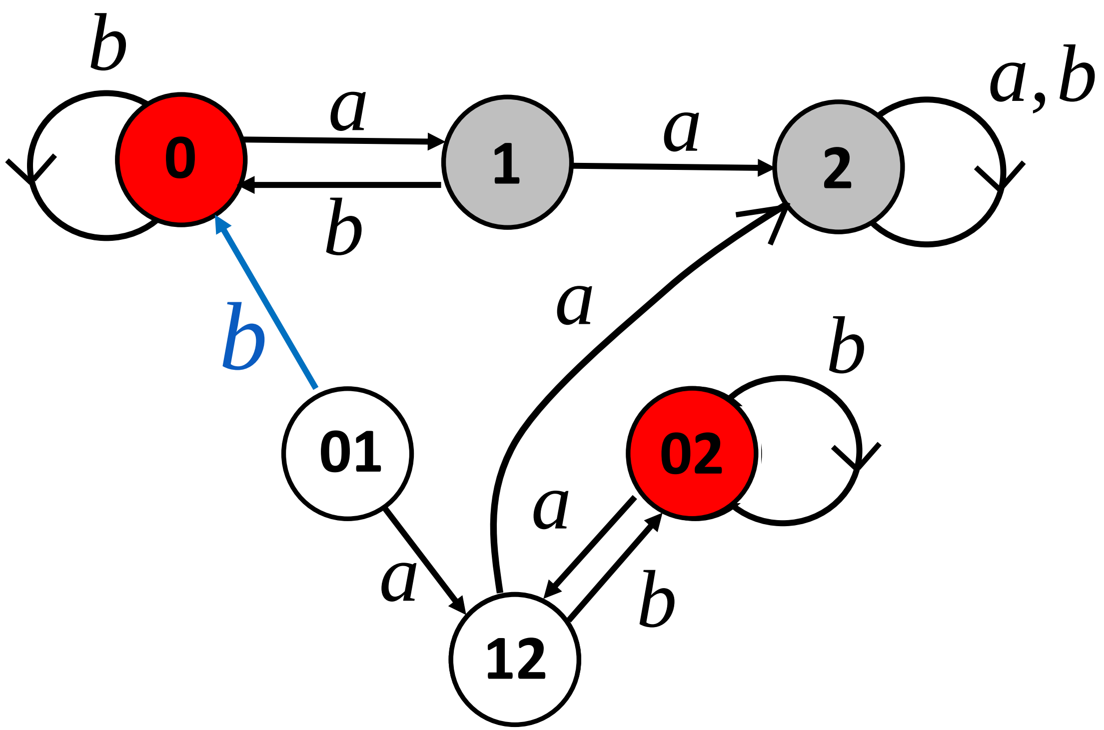
ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова



Подействуем словом w_1 на каждую "красную двуэлементную вершину", т.е. на вершину из множества ***M*.**

$\{0,1\}.w_1 = \{0\}$,
$\{0,2\}.w_1 = \{0,2\}$,
$\{1,2\}.w_1 = \{0,2\}$

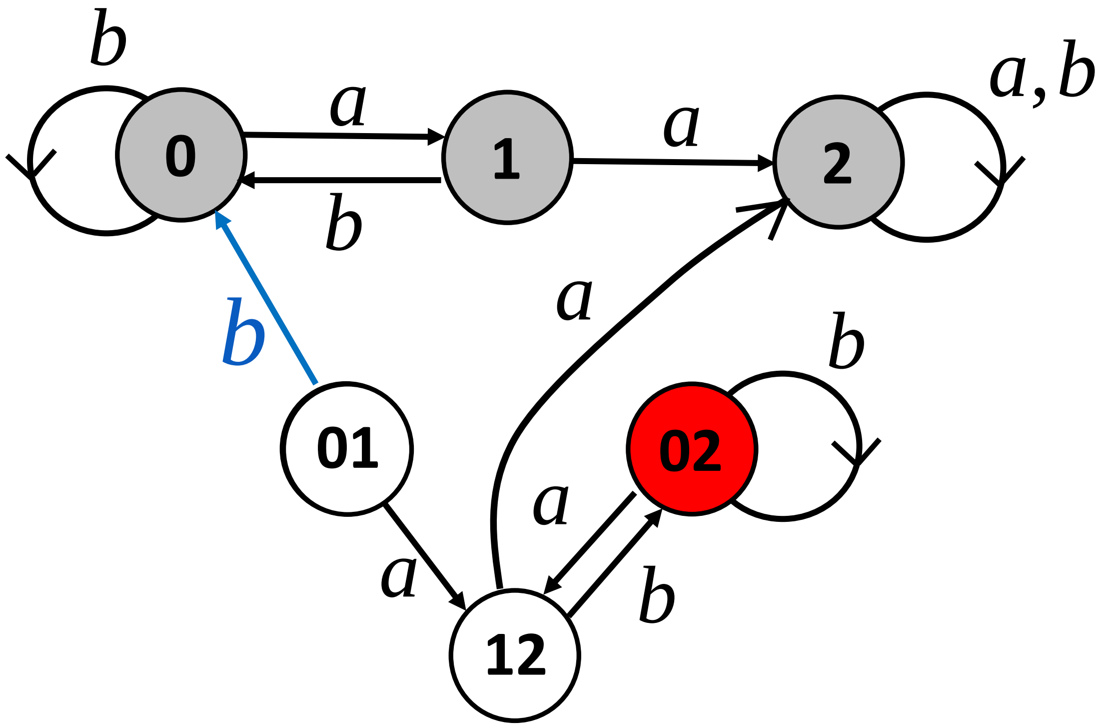
ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова



Судьба красной фишки на одноэлементной вершине {0} нас уже не интересует, поскольку под действием любого слова «одноэлементная» вершина переходит в «одноэлементную».

А значит, «двухэлементная» вершина {0,1} под действием любого слова с префиксом w_1 перейдет в некоторую «одноэлементную».

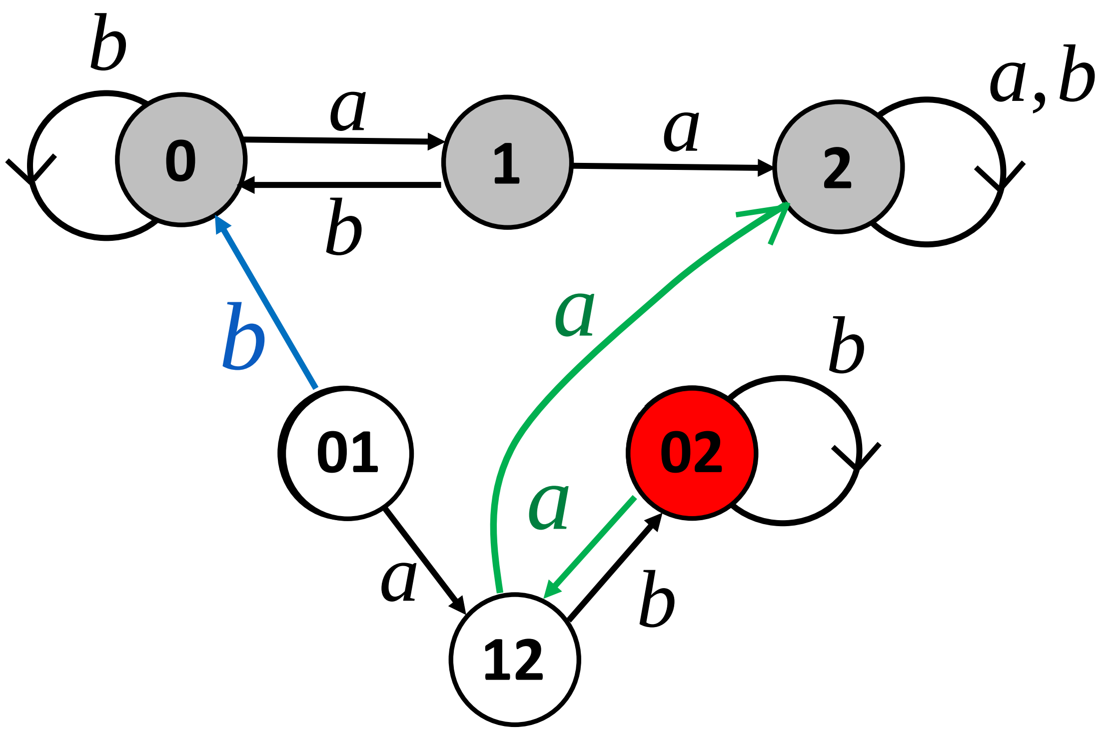
ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизирующего слова



Судьба красной фишки на одноэлементной вершине {0} нас уже не интересует, поскольку под действием любого слова «одноэлементная» вершина переходит в «одноэлементную».

А значит, «двухэлементная» вершина {0,1} под действием любого слова с префиксом w_1 перейдет в некоторую «одноэлементную».

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова

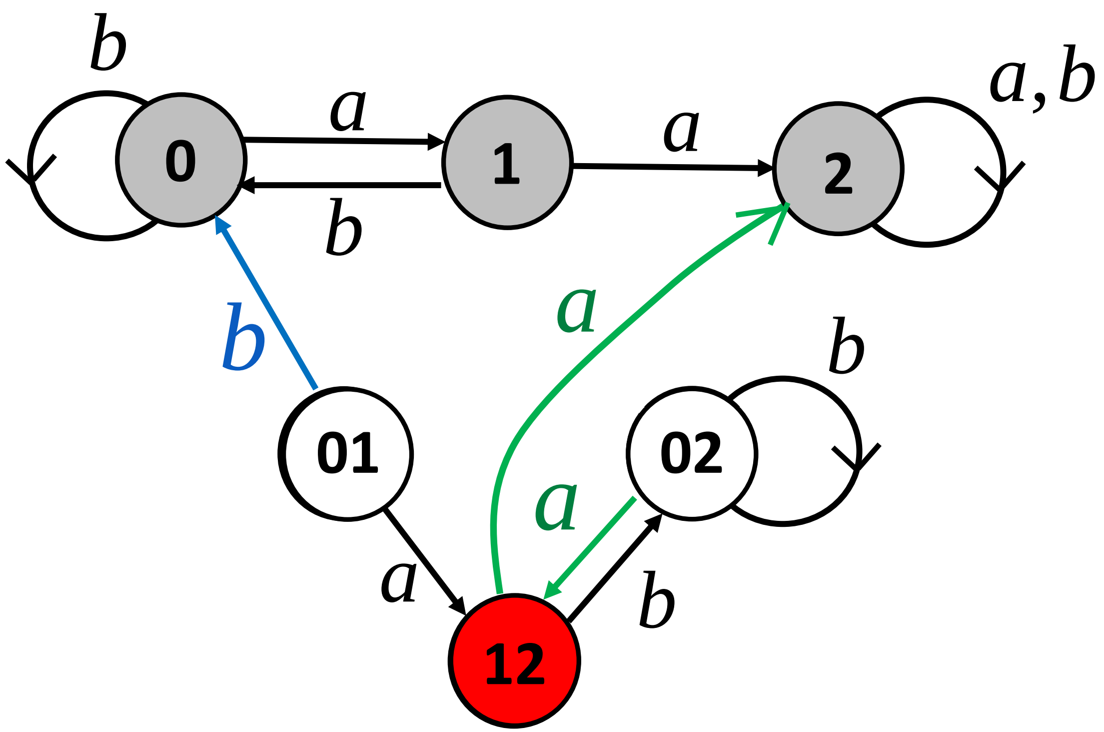


Теперь множество ***M*** состоит из одной двухэлементной вершины {0,2}.

Она и является ближайшей вершиной множества ***M*** к множеству ***N***.

Кратчайший путь: $\{0,2\} \xrightarrow{a} \{1,2\} \xrightarrow{a} \{2\}$

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова

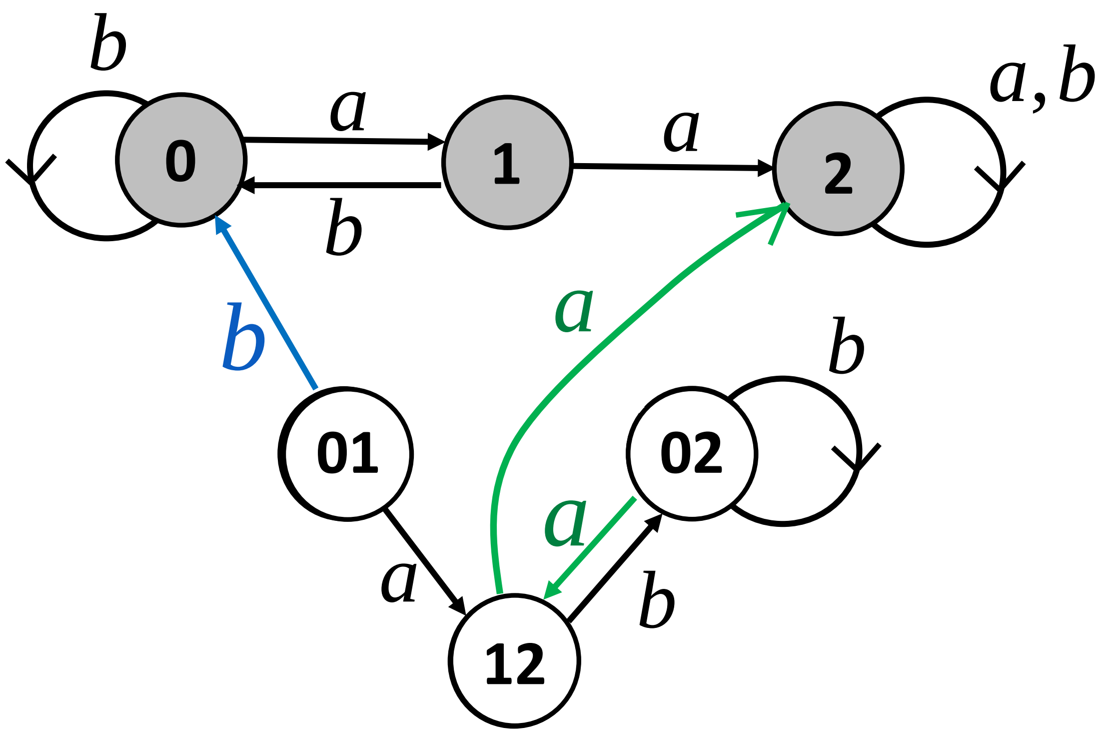


Теперь множество ***M*** состоит из одной двухэлементной вершины {0,2}.

Она и является ближайшей вершиной множества ***M*** к множеству ***N***.

Кратчайший путь: $\{0,2\} \xrightarrow{a} \{1,2\} \xrightarrow{a} \{2\}$

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизируещего слова



Теперь множество ***M*** состоит из одной двухэлементной вершины {0,2}.

Она и является ближайшей вершиной множества ***M*** к множеству ***N***.

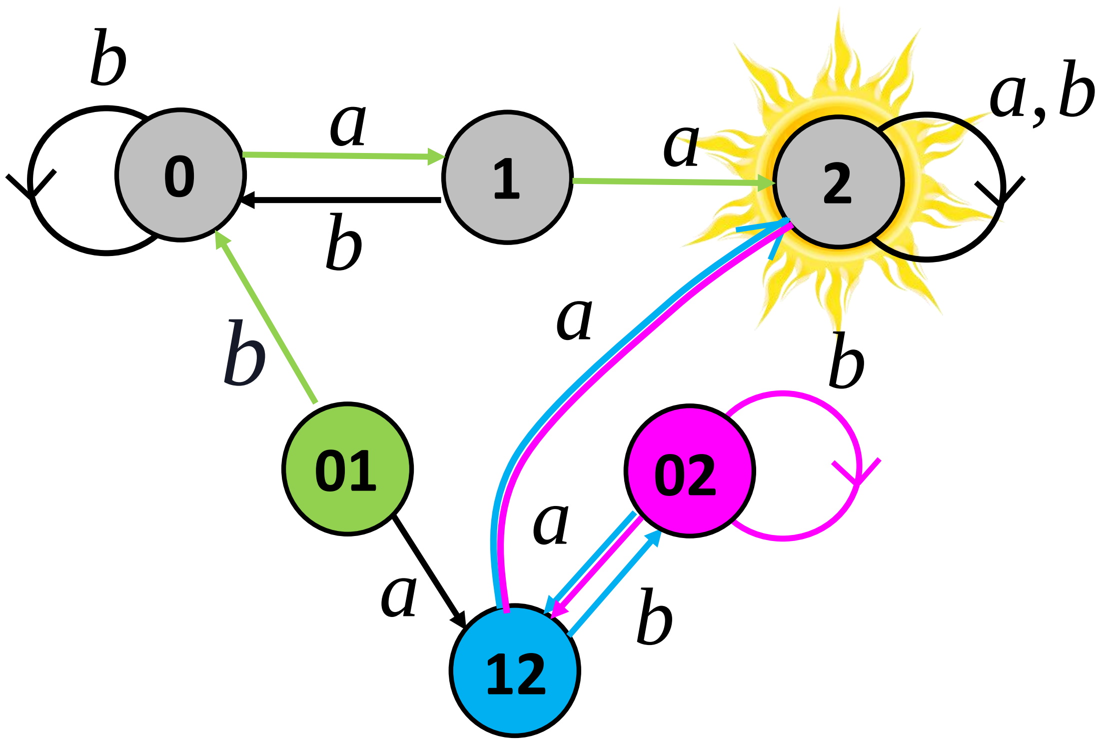
Кратчайший путь: $\{0,2\} \xrightarrow{a} \{1,2\} \xrightarrow{a} \{2\}$

Наконец, множество ***M*** *пусто.*

Положим $w_2 = aa$.

Слово $w = w_1 w_2 = baa$ является синхронизирующим словом.

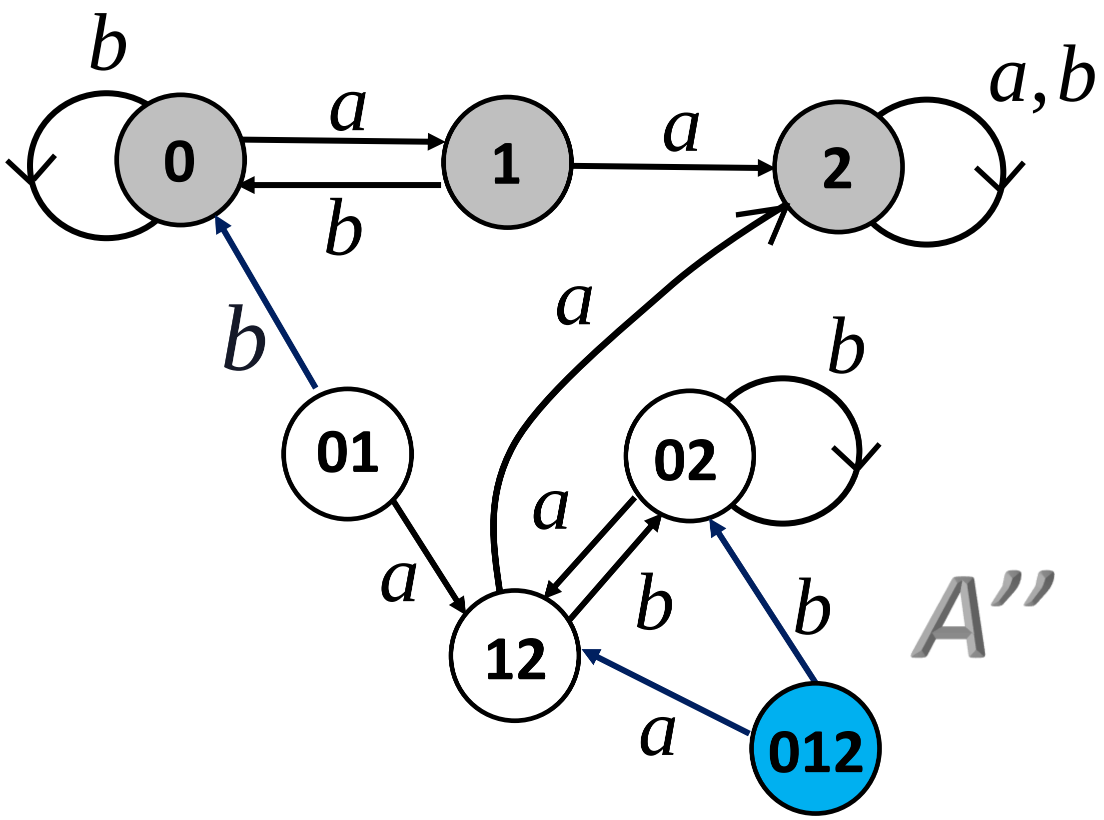
ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ нахождения синхронизирующего слова



Таким образом, выполнено условие **теоремы 2**.

Видно, что под действием синхронизирующего слова *w* все «двухэлементные» вершины переходят в «одноэлементную» вершину **{2}** (т.е. данный автомат является синхронизируемым по определению)

АЛГОРИТМ нахождения кратчайшего синхронизирующего слова



Получим автомат A''.

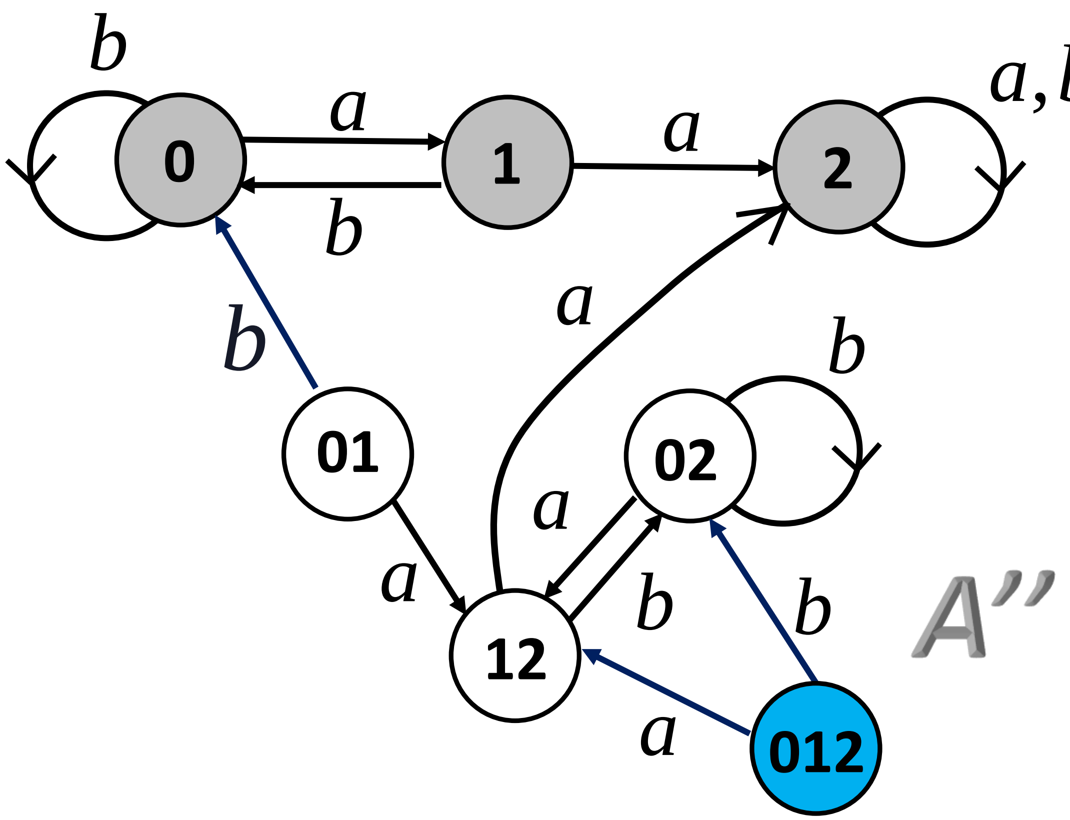
Дополним автомат A' новыми "вершинами" - всевозможными подмножествами множества вершин исходного автомата A и соответствующими дугами.

Нам надо добавить только «*трехэлементную*» вершину – $\{0,1,2\}$ и соответствующие дуги:

$\{0,1,2\}.a=\{0.a,1.a,2.a\}=\{1,2\}$

$\{0,1,2\}.b=\{0.b,1.b,2.b\}=\{0,2\}$

АЛГОРИТМ нахождения кратчайшего синхронизирующего слова

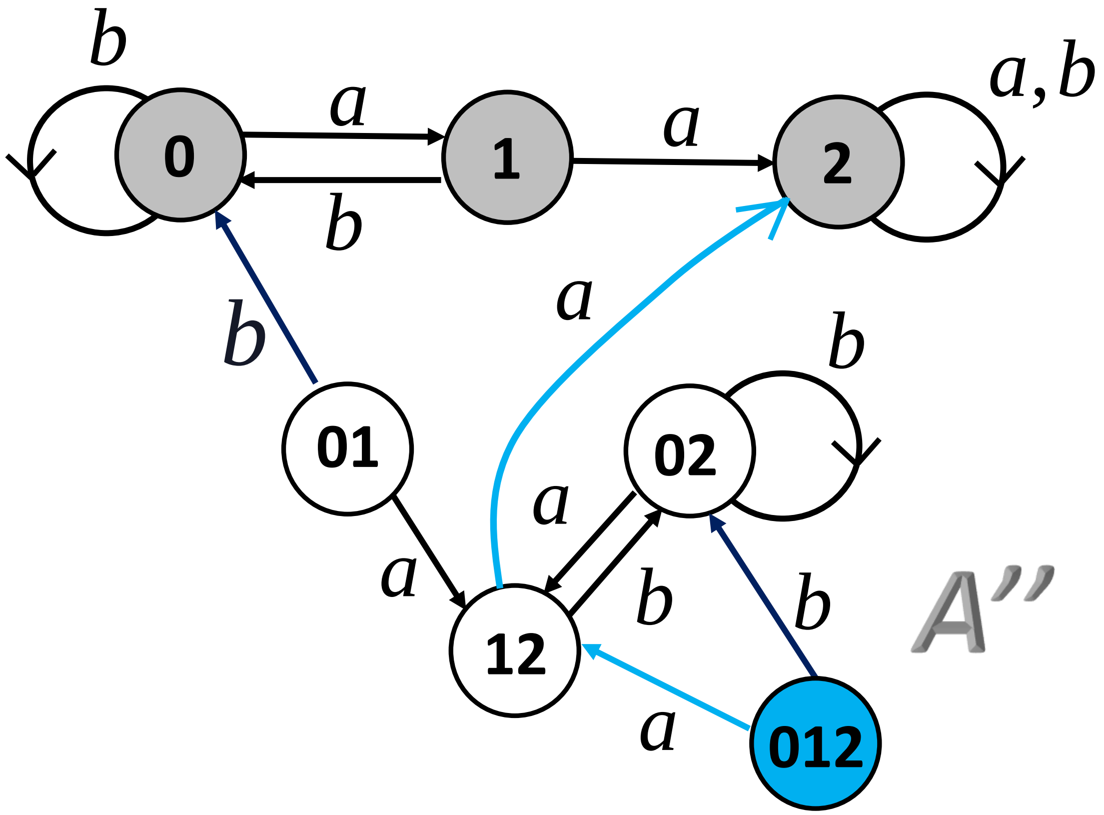


Найдем **кратчайшее синхронизирующее** слово исходного автомата *A:* *кратчайший путь* от вершины {0,1,2} до множества ***N*** «одноэлементных вершин»

Кратчайший путь:

$$\{0,1,2\} \xrightarrow{a} \{1,2\} \xrightarrow{a} \{2\}$$

АЛГОРИТМ нахождения кратчайшего синхронизирующего слова

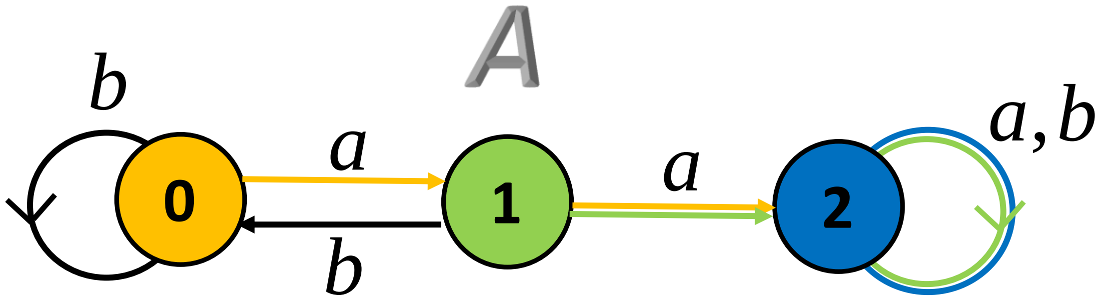


Найдем **кратчайшее синхронизирующее** слово исходного автомата *A*: *кратчайший путь* от вершины $\{0,1,2\}$ до множества ***N*** «одноэлементных вершин»

Кратчайший путь:

$$\{0,1,2\} \xrightarrow{a} \{1,2\} \xrightarrow{a} \{2\}$$

АЛГОРИТМ нахождения кратчайшего синхронизирующего слова



Заметим, что слово $w' = aa$ действительно является кратчайшим синхронизирующим словом, поскольку переводит каждую вершину автомата A в вершину 2.

Интересно, что слово $w' = aa$ могло быть получено и ЖАДНЫМ алгоритмом на первом шаге (см. слайд 10), если бы мы в качестве ближайшей “двухэлементной” вершины к множеству “одноэлементных” вершин выбрали бы не вершину $\{0,1\}$, а вершину $\{1,2\}$ (**показать самостоятельно**).

Слово $w' = aa$ **короче** синхронизирующего слова $w = baa$, полученного **ЖАДНЫМ** алгоритмом.