ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ
Решенный тренировочный вариант контрольной работы
Задача 6

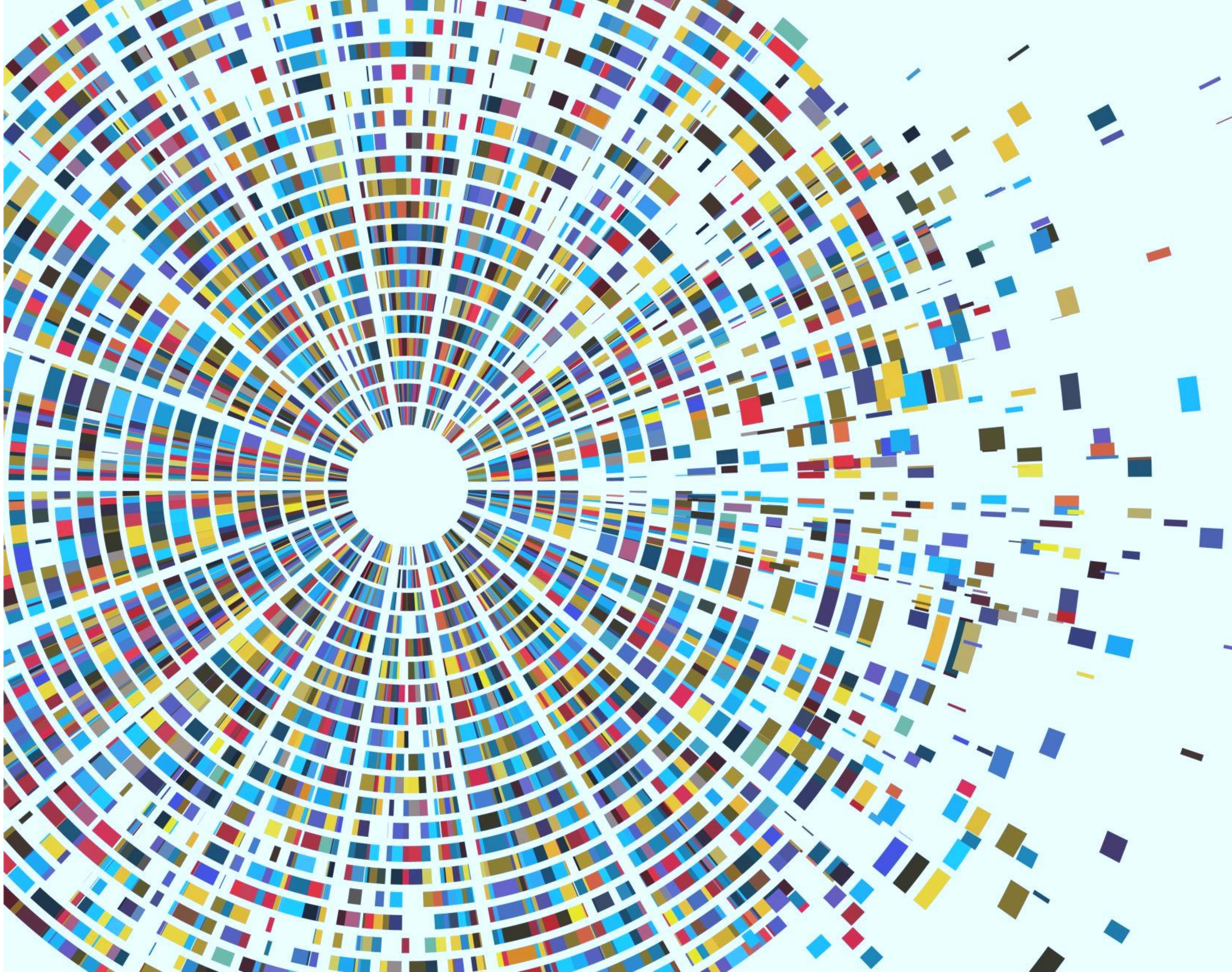
Направл.: Математика и компьютерные науки

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.

В проекте участвовали студенты

Нечуговских А.А.,

Колоскова М.



Определение частного данного языка

Частные разделяют на левые и правые.
Левое (правое) частное - это все такие слова, которые мы можем получить, убрав из слов из L префиксы (суффиксы), которые содержатся в K.

$$K^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : v \in K, vw \in L\} \text{ – левое частное}$$

$$LK^{-1} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : v \in K, wv \in L\} \text{ – правое частное}$$

ЗАДАЧА (вспомогательная)

Пусть $L = \{a^n b^m \mid n, m \in N\}$. Будет ли этот язык регулярным? Рассмотрим $K_1 = a^*$, $K_2 = \{a^n b^n \mid n \in N\}$. Найдите $K_i^{-1}L, LK_i^{-1}$.

Вначале заметим, что $L = aa^*bb^* = a^+b^+$ – регулярный язык

1) $К_1 = a^* = \{a^l \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ – регулярный язык. По определению левого частного

$$K_1^{-1}L = \{a^{n-l}b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq l\} =$$

$$= \{a^k b^m \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N}\} = a^* b^+$$

$LK_1^{-1} = L$ (так как в языке L нет слов, с суффиксом из букв a,
но мы всё ещё можем отрезать ноль букв a

Видим, что $K_1^{-1}L$ и LK_1^{-1} тоже регулярны.

Это вытекает из свойств операций с регулярными языками

ЗАДАЧА (вспомогательная)

Пусть $L = \{a^n b^m \mid n, m \in N\}$. Будет ли этот язык регулярным? Рассмотрим $K_1 = a^*$, $K_2 = \{a^n b^n \mid n \in N\}$. Найдите $K_i^{-1}L, LK_i^{-1}$.

2) $K_2 = \left\{a^l b^l \mid l \in \mathbb{N}\right\}$ – не регулярный язык. (доказано ранее)

По определению правого частного

Заметим, что слово $w_1 = a^l b^l$ – префикс (начало) слова $w_2 = a^n b^m$

для $l, n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ тогда и только тогда, когда $l = n$.

Действительно, $w_1 = a^l b^l = \underbrace{aa..aa}_{l}\underbrace{bb..bb}_{l}$ – префикс слова

$$w_2 = a^n b^m = \underbrace{aa..a..aa}_{n}\underbrace{bbb..bb}_{m} \Leftrightarrow l = n. \text{ Тогда } w_1^{-1} w_2 = b^{m-l} = b^k$$

для $k = m - l$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Следовательно $K_2^{-1} L = b^*$. Аналогично, $LK_2^{-1} = a^*$.

Интересно, что частные $K_2^{-1} L$, LK_2^{-1} – регулярные, хотя K_2 – не регулярный.

D-ть, что язык $L = \{a^n b^n \mid n \in \Sigma\}$ нерегулярный

L - рег. яз $\Leftrightarrow$ мн-во его левых частных конечно ($\{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\}$ - конечно)

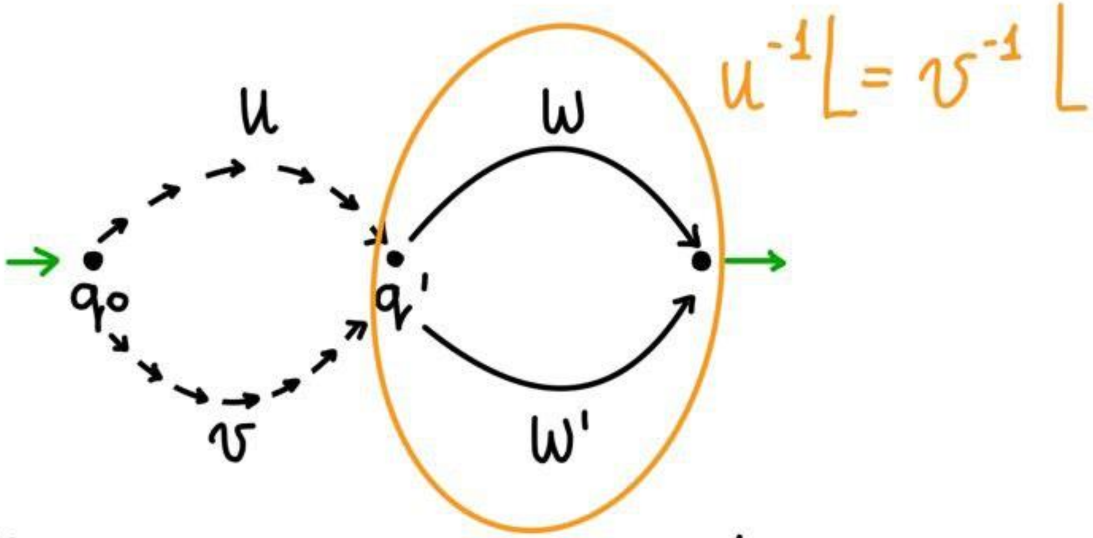
$\Leftrightarrow$ мн-во его классов эквивалентности $\{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\}$ конечно

$\sim_L$ - отношение эквивалентности на Σ^*

$u \sim_L v \Leftrightarrow \delta(q_0, u) = \delta(q_0, v)$

$u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid uw \in L\}$

$u \sim_L v \Leftrightarrow u^{-1}L = v^{-1}L$



Предположим, что L - регулярен $\Leftrightarrow \{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\}$ - конечно

Рассмотрим $u_k = a^k : k \in \mathbb{N}$ $k = const$

$u_k^{-1} L = (a^k)^{-1} L = \{a^{n-k} b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq k\}$

На a^k начинаются только слова вида $a^n b^n : n \geq k$. Из них и берутся частные

$(a^k)^{-1} \cdot a^n b^n = a^{n-k} b^n$

Покажем, что мн-во классов $\{u_1^{-1} L, u_2^{-1} L, \dots\} =$
$= \{a^{-1} L, (a^2)^{-1} L, \dots\}$ бесконечно

Если конечно $\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : u_{k_1}^{-1} L = u_{k_2}^{-1} L \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a^{k_1})^{-1} L = (a^{k_2})^{-1} L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{a^{n-k_1} b^n \mid n \geqslant k_1, n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{a^{m-k_2} b^m \mid m \geqslant k_2, m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^{n-k_1} b^n = a^{m-k_2} b^m$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k_1, m \geqslant k_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = n \Rightarrow a^{n-k_1} b^n = a^{n-k_2} b^n \Rightarrow k_1 = k_2$$

<u>Замечание</u>. Кроме частных $u_k = \left(a^k\right)^{-1} L$ есть еще и непустые частные

$v_{n,k} = \left(a^n b^k\right)^{-1} L = \{b^{n-k}\}, n \geq k$.

Заметим, что $v_{n,k}$ – одноэлементно, а u_k – бесконечно, и значит, u_{k_1} не равно v_{n,k_2} ни для каких k_1, k_2, $n \geq k_2$.

Задача 6 (из тренировочного варианта), I способ

Доказать, что данный язык $L = \left\{ a^{2n} b^{2n} c^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ не является регулярным.

Для решения задачи используем следующее утверждение

Теорема : Язык L – регулярен $\Leftrightarrow$ множество его частных конечно

Решение задачи

Заметим, что по определению левого частного для любого слова $n \in \Sigma^*$ справедливо

$u^{-1}L \neq \varnothing \Leftrightarrow u$ – префикс какого – то слова из L

Таким образом, $u^{-1}L \neq \varnothing \leftrightarrow$ слово u может иметь один из следующих видов

(1) $u = a^k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow u^{-1}L = \{a^{2n-k} b^{2n} c^{2n} \mid n \in \mathbb{N},\ k \le 2n\}$

(2) $u = a^{2k} b^l$, где $l \le 2k,\ l, n \in \mathbb{N} \Rightarrow u^{-1}L = \left\{ b^{2k-l} c^{2l} \right\}$

(3) $u = a^{2k} b^{2k} c^l$, где $l \le 2k,\ l, n \in \mathbb{N} \Rightarrow u^{-1}L = \left\{ c^{2k-l} \right\}$

О\П : L – регулярен, тогда по теореме множество его частных конечно.

Частные $u_1^{-1}L \neq u_2^{-1}L$, если u_1 и u_2 принадлежат разным видам

Пусть u_1, u_2 вида (1), т.е. $u_1 = a^{k_1}$, $u_2 = a^{k_2}$ и $u_1^{-1}L = u_2^{-1}L$

Далее, пусть $w \in u_1^{-1}L$, т.е.

$$w = a^{2n_1 - k_1} b^{2n_1} c^{2n_1} \text{ для некоторого } n_1 \in \mathbb{N}$$

такого, что $k_1 \leq 2n_1$. Но тогда $w \in u_2^{-1}L$ т.е.

$$w = a^{2n_2 - k_2} b^{2n_2} c^{2n_2} \text{ для некоторого } n_2 \in \mathbb{N}$$

Просматривая слово w справа налево, получаем $n_1 = n_2$

Просматривая слово w слева направо, получаем $k_1 = k_2$

Это означает, что $u_1 = u_2$. Следовательно одинаковые частные получаются только при одинаковых u_1, u_2. Следовательно множество часных $u^{-1}L$ для слов вида (1) бесконечно. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Доказательство нерегулярности языка при помощи леммы о накачке (pumping lemma)

Лемма о разрастании, pumping lemma.

Лемма о накачке является важным теоретическим результатом, позволяющим проверить, является ли данный язык регулярным.

Лемма применяется для проверки бесконечных языков, т.к. любой конечный язык – регулярный.

Доказательство нерегулярности языка при помощи леммы о накачке (pumping lemma)

Лемма (о накачке). Для бесконечного регулярного языка L над алфавитом Σ выполняется:

$$\exists n \in \mathbf{N}:\ \forall \alpha \in L:\ |\alpha| \geq n\ \exists u, v, w \in \Sigma^{*}: \alpha = uvw,\ \ |uv| \leq n,\ \ |v| \geq 1,$$

$$\forall i \in \mathbf{N} \cup \{0\}\ \rightarrow\ uv^{i}w \in L.$$

Доказательство нерегулярности языка при помощи леммы о накачке (pumping lemma)

Замечание: лемма о накачке дает необходимое условие регулярности языка, но не достаточное.

Для ее применения часто используют обратное утверждение:
Если $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$\exists \alpha \in L : |\alpha| \geq n \ \forall u, v, w \in \Sigma^* : \alpha = uvw, \ |uv| \leq n, \ |v| \geq 1,$$

$$\exists i \in \mathbf{N} \cup \{0\} : \quad uv^i w \notin L,$$

то язык L не регулярный.

ЗАДАЧА (первичная, II способ)

Доказать, что язык $L = \{a^n b^n | n \in \boldsymbol{N}\}$ нерегулярный.

Рассмотрим произвольное $n \in \boldsymbol{N}$. Возьмем $\alpha = a^n b^n \in L$. При этом $|\alpha| = 2n \geq n$.

Пусть $\alpha = uvw, |uv| \leq n$ и $|v| \geq 1$, т. е. $a^n b^n = uvw$.

Тогда $uv = a^m, m \leq n$, при этом $u = a^{m_1}, v = a^{m-m_1}$ для $m_1 < m$, $w = a^{n-m} b^n$.

Значит, $uv^i w = a^{m_1}\, a^{(m-m_1)\cdot i}\, a^{n-m} b^n = a^{m_1+(m-m_1)\cdot i+n-m}\, b^n$.

При достаточно большом i число $m_1 + (m - m_1) \cdot i + n - m > n$.

Значит, $uv^i w \notin L \Rightarrow L$ – нерегулярный.

Задача 6 (из тренировочного варианта), II способ

Доказать, что язык $L = \{a^{2n}b^{2n}c^{2n} | n \in \boldsymbol{N}\}$ нерегулярный.

Рассмотрим произвольное $n \in \boldsymbol{N}$. Возьмем $\alpha = a^{2n}b^{2n}c^{2n} \in L$. При этом $|\alpha| = 6n \geq n$.

Пусть $\alpha = uvw, |uv| \leq n$ и $|v| \geq 1$, т. е. $a^n b^n = uvw$.

Тогда $uv = a^m, m \leq n$, при этом $u = a^{m_1}, v = a^{m-m_1}$ для $m_1 < m$, $w = a^{2n-m}b^{2n}c^{2n}$.

Значит,

$uv^iw = a^{m_1}\ a^{(m-m_1)\cdot i}\ a^{2n-m}b^{2n}c^{2n} = a^{m_1+(m-m_1)\cdot i+2n-m}\ b^{2n}c^{2n}$.

При достаточно большом i число $m_1 + (m - m_1) \cdot i + 2n - m > 2n$.

Значит, $uv^iw \notin L \Rightarrow L$ – нерегулярный.