

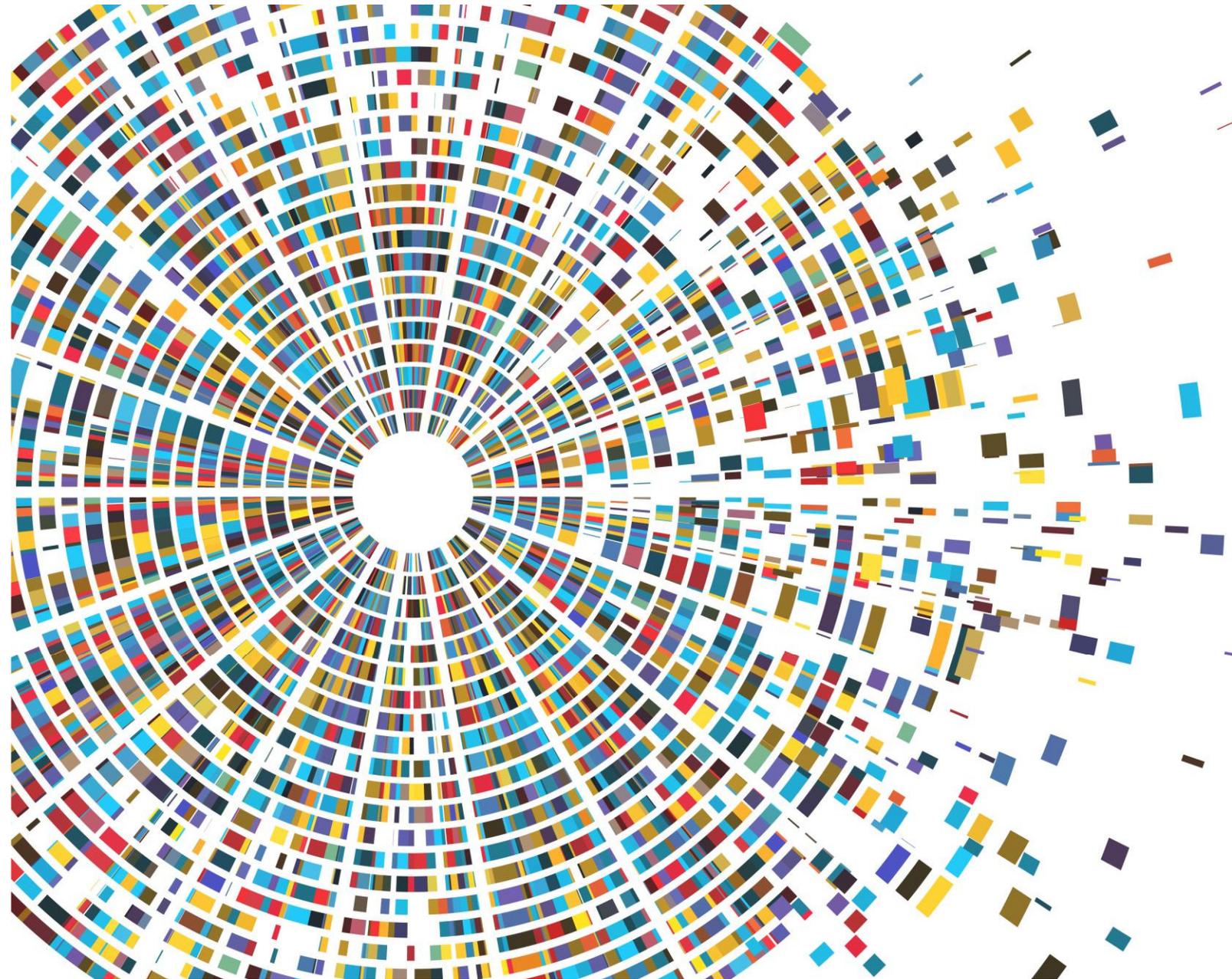
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Решенный
тренировочный
вариант
контрольной
работы
Задача 5

Направл.: Математика и
компьютерные науки

к.ф.-м.н., доцент
Нагребцкая Ю.В.

Участвовали в проекте
студенты Старков Э.Е.,
Коваленко А.Ю.,
Нечуговский А.А.



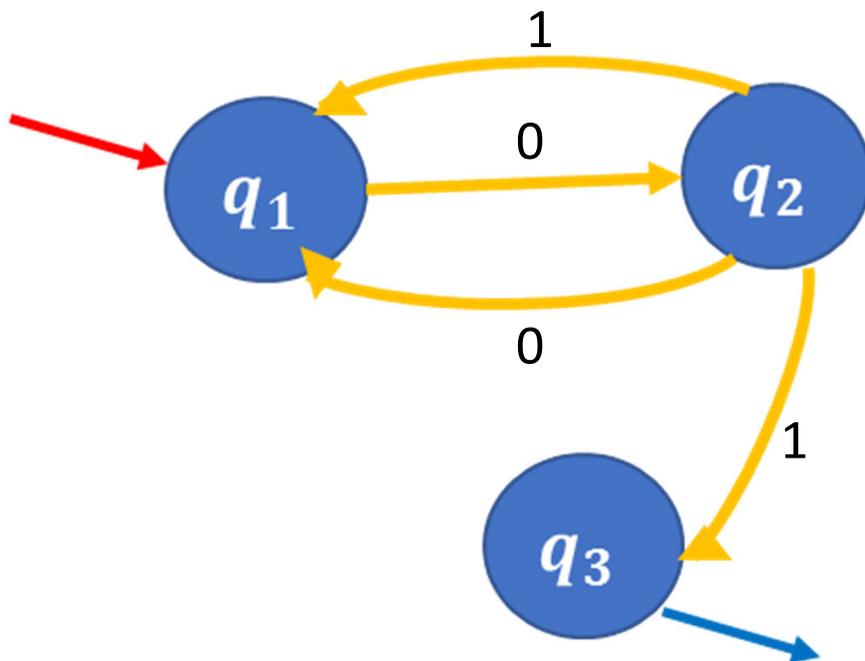
ЗАДАЧА 5 а) (Построение ДКА по НКА)

а) Найти приведенный ДКА, распознающий тот же язык, что и данный НКА

| | 0 | 1 | F |
|-------|-------|------------|---|
| q_1 | q_2 | | 0 |
| q_2 | q_1 | q_1, q_3 | 0 |
| q_3 | | | 1 |

- Построим сначала ДКА A' , распознающий тот же язык, что и данный НКА A
- **Состояниями** этого ДКА A' будут *некоторые множества состояний* исходного НКА A
- **Начальным состоянием** ДКА A' будет *множество всех начальных состояний* НКА A
- **Заключительными состояниями** ДКА A' будут *такие состояния ДКА A' , которые содержат хотя бы одно заключительное состояние* НКА A

ЗАДАЧА 5а) Диаграмма данного НКА



1) $\varphi(\{q1\}, 0) = \{q2\}$

$\varphi(\{q1\}, 1) = \emptyset$

2) $\varphi(\{q2\}, 0) = \{q1\}$

$\varphi(\{q2\}, 1) = \{q1, q3\}$

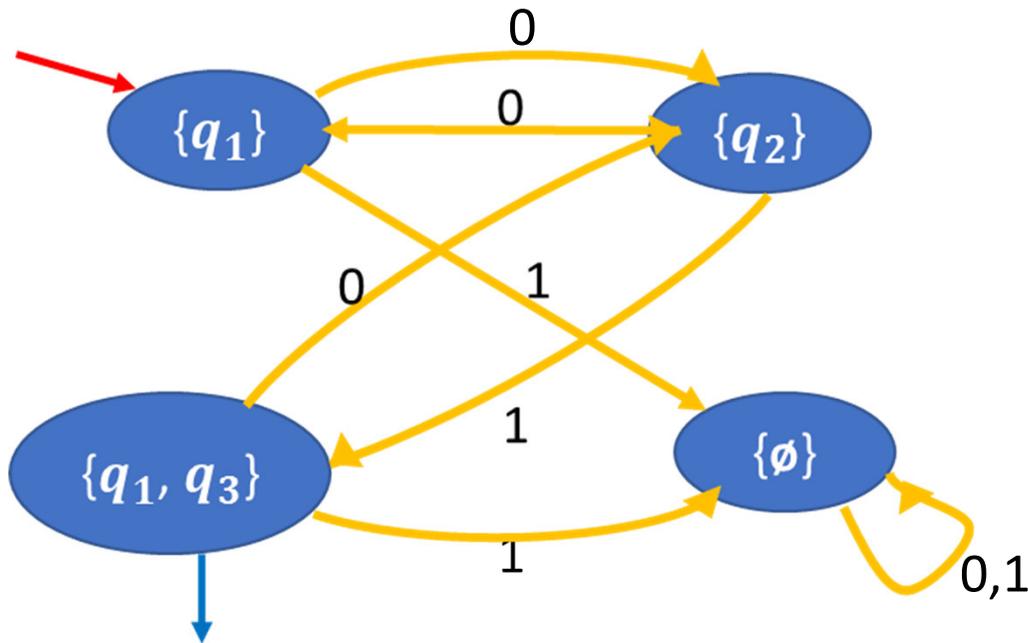
3) $\varphi(\emptyset, 0) = \emptyset$

$\varphi(\emptyset, 1) = \emptyset$

4) $\varphi(\{q1, q3\}, 0) = \{q2\}$

$\varphi(\{q1, q3\}, 1) = \emptyset$

ЗАДАЧА 5а) Диаграмма и таблица переходов построенного приведенного ДКА



| | 0 | 1 | F |
|----------|------|----------|---|
| {q1} | {q2} | ∅ | 0 |
| {q2} | {q1} | {q1, q3} | 0 |
| {q1, q3} | {q2} | ∅ | 1 |
| ∅ | ∅ | ∅ | 0 |

Нетрудно показать, что построенный ДКА A' с вершинами $Q_1 = \{q_1\}$, $Q_2 = \{q_2\}$, $Q_3 = \{q_1, q_3\}$, $Q_4 = \emptyset$ является **приведенным** ДКА A'' .

ЗАДАЧА 5 б) (Использование теоремы Клини)

Построить стандартный λ -НКА, распознающий язык, заданный регулярным выражением $((a \cup b)^*c) \cup a$. Построить соответствующий приведенный ДКА.

Напомним, как строится автомат по данному регулярному выражению.

Пусть A_1, A_2 – автоматы, распознающие языки L_1, L_2 , соответственно.

q_1, q_2 – начальные вершины автоматов A_1, A_2 , соответственно.

r_1, r_2, \dots – заключительные вершины автомата A_1 .

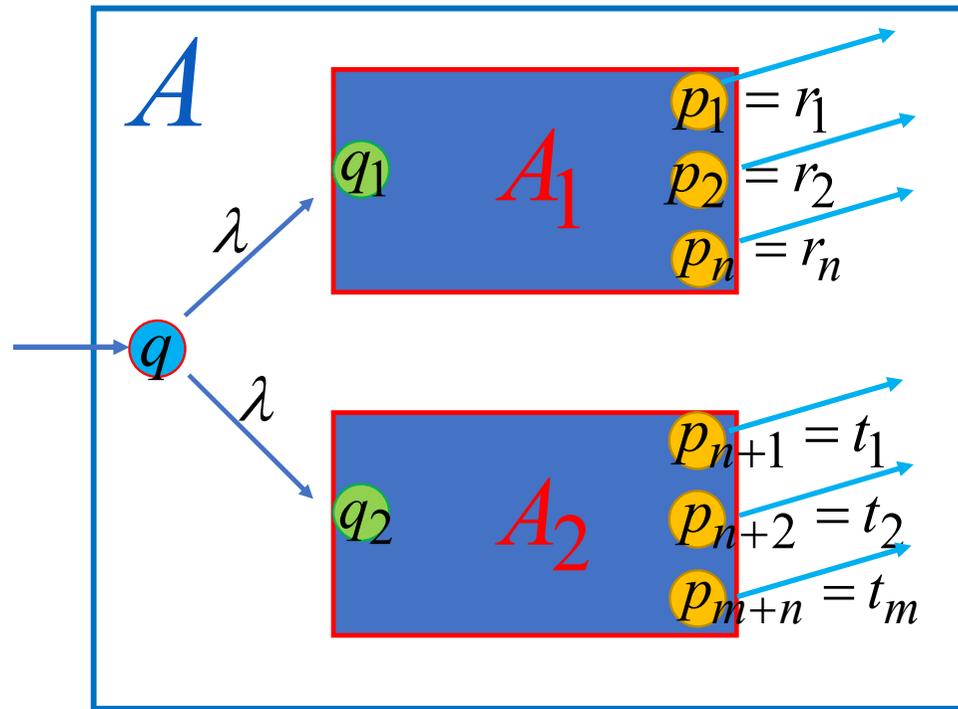
t_1, t_2, \dots – заключительные вершины автомата A_2 .

По этим автоматам будет строиться автомат A .

q – начальная вершина автомата A .

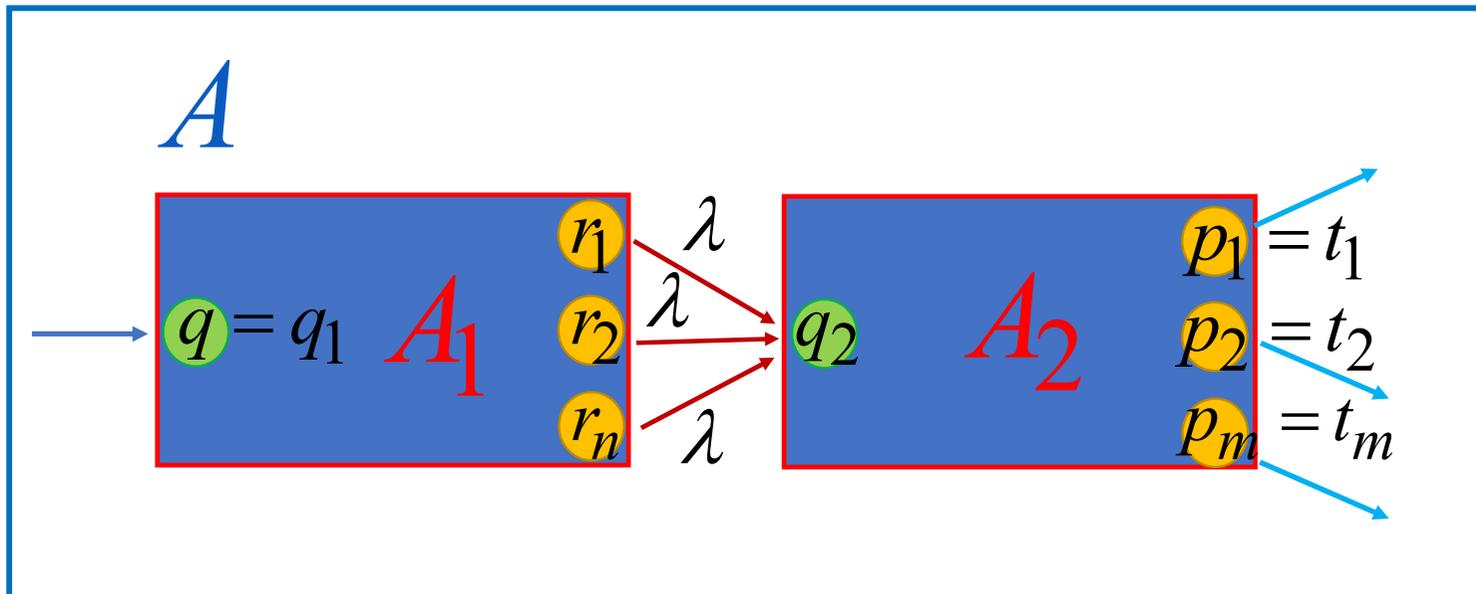
p_1, p_2, \dots – заключительные вершины автомата A .

Построение автомата для объединения языков



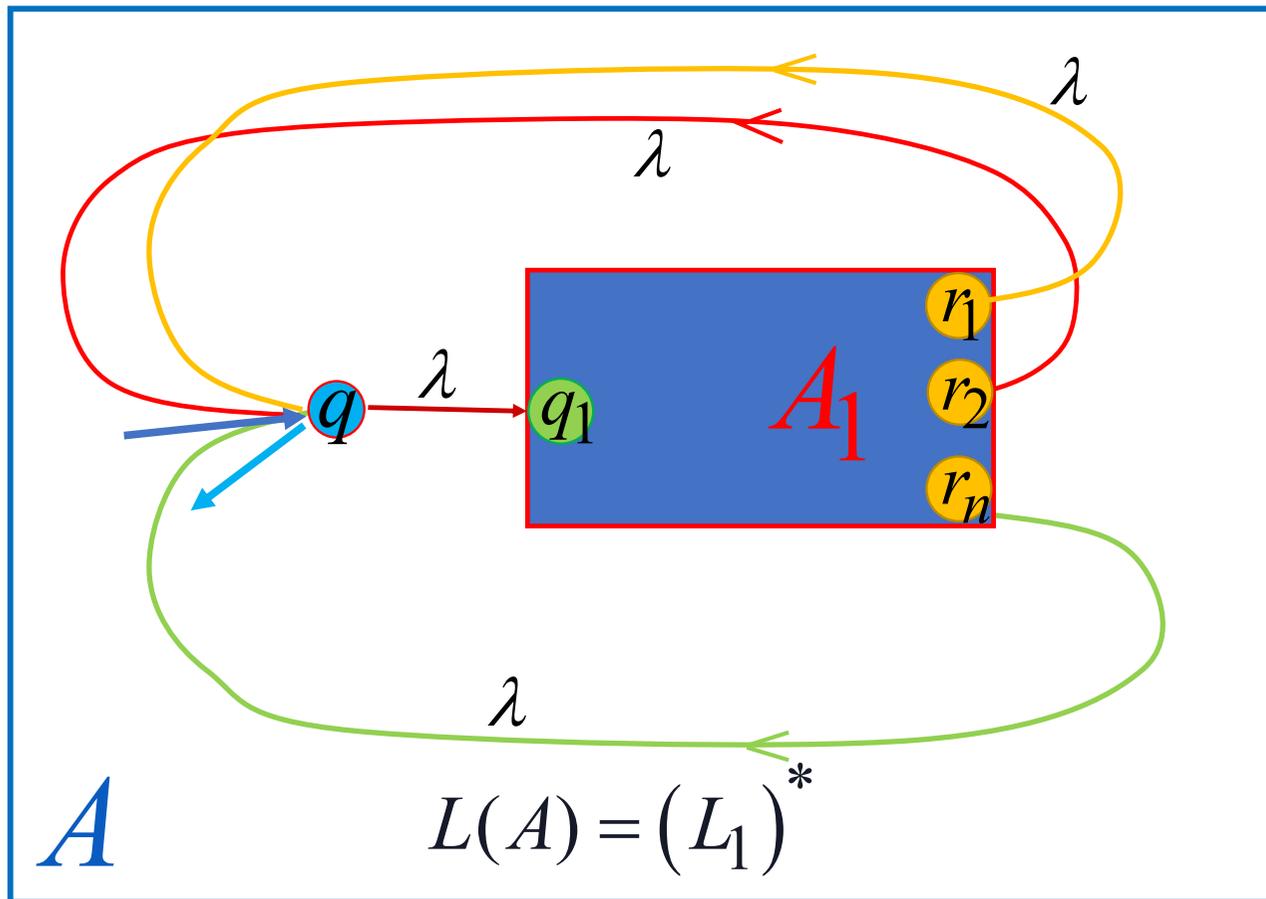
$$L(A) = L_1 \cup L_2 = L_1 + L_2$$

Построение автомата для произведения языков

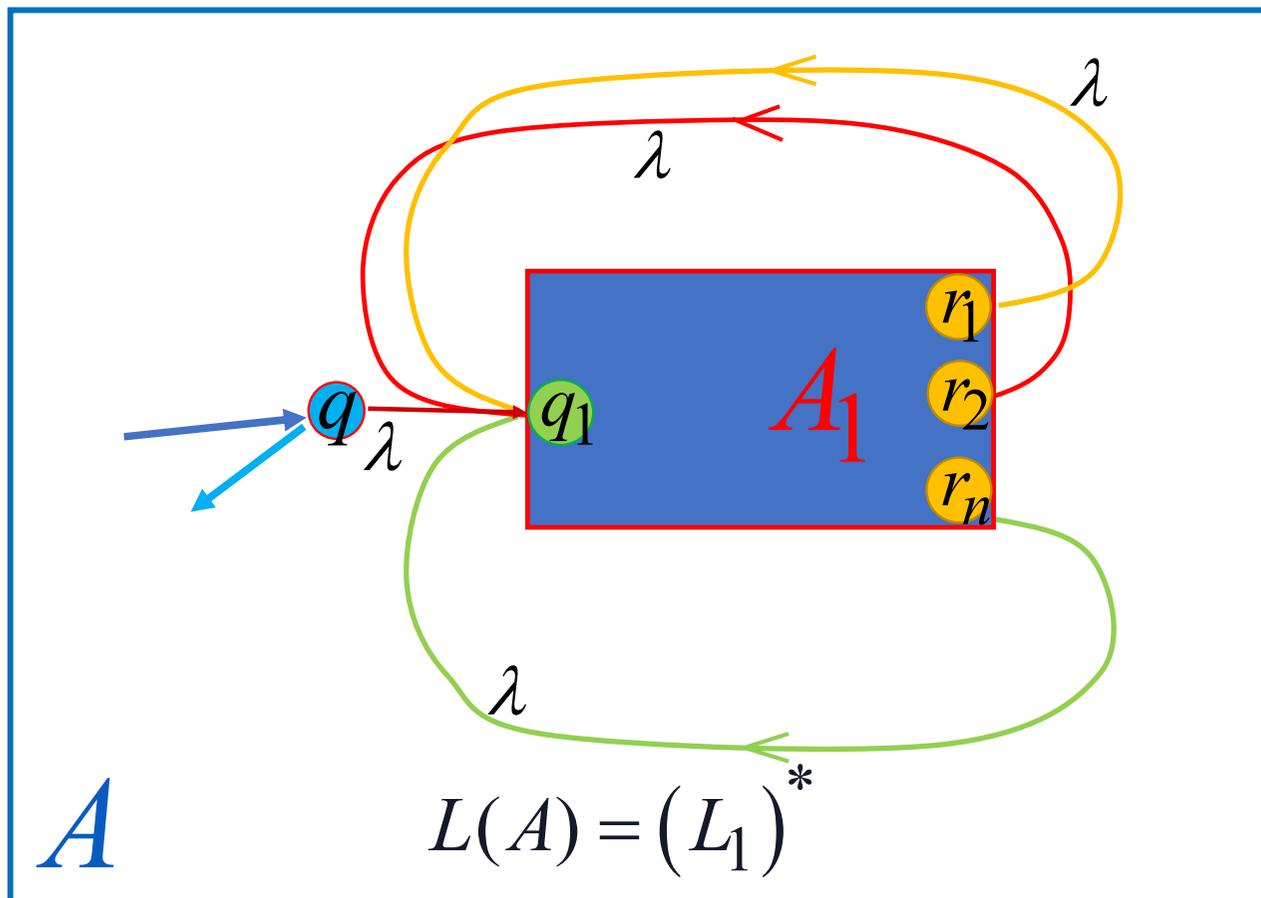


$$L(A) = L_1L_2$$

Построение автомата для операции * (итерации), I способ



Построение автомата для операции * (итерации), II способ



Построение ДКА для пересечения [объединения] двух языков при помощи декартового произведения ДКА

Сначала построим автоматы, распознающие каждый язык:

Пусть у первого автомата:

всего n состояний: q_0, q_1, \dots, q_n

F_1 - множество финальных состояний

Пусть у второго автомата:

всего k состояний: p_0, p_1, \dots, p_k

F_2 - множество финальных состояний

Тогда у искомого автомата всего $n \cdot k$ состояний, каждое из которых задается парой (q_i, p_j) :

$(q_0, p_0), (q_0, p_1), \dots, (q_0, p_k)$

$(q_1, p_0), (q_1, p_1), \dots, (q_1, p_k)$

...

$(q_n, p_0), (q_n, p_1), \dots, (q_n, p_k)$

Функция переходов нового автомата задается как: $\delta((q_i, p_j), a) = (\delta(q_i, a), \delta(p_j, a))$

т.е. допустим: $\delta(q_0, a) = q_1$; $\delta(p_0, a) = p_1$

Тогда: $\delta((q_0, p_0), a) = \text{состояние } (q_1, p_1)$

Различия между автоматами, распознающими пересечение и объединение, лишь во множестве финальных состояний:

В случае пересечения состояние (q_i, p_j) будет финальным, если $q_i \in F_1 \wedge p_j \in F_2$

В случае объединения состояние (q_i, p_j) будет финальным, если $q_i \in F_1 \vee p_j \in F_2$

Построение ДКА для дополнения языка по ДКА, задающим данный язык

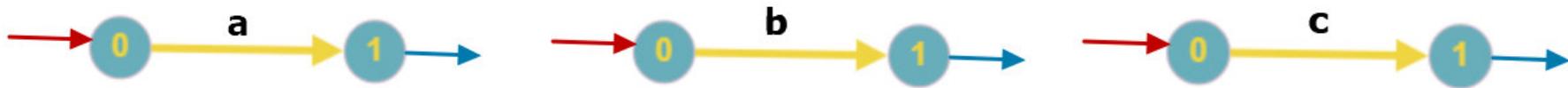
В автомате, задающим исходный язык надо поменять все **заключительные** состояния на **не заключительные** и наоборот, все не заключительные сделать **заключительными**.

Построение λ -НКА для решения ЗАДАЧИ 5

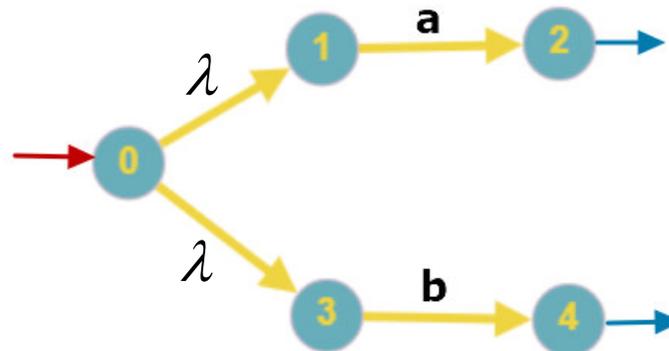
Построить стандартный λ -НКА, распознающий язык, заданный регулярным выражением $((a \cup b)^* c)^* \cup a$.

Построить соответствующий приведенный ДКА.

Языки, задаваемые регулярными выражениями a, b, c , заданы соответственно автоматами:

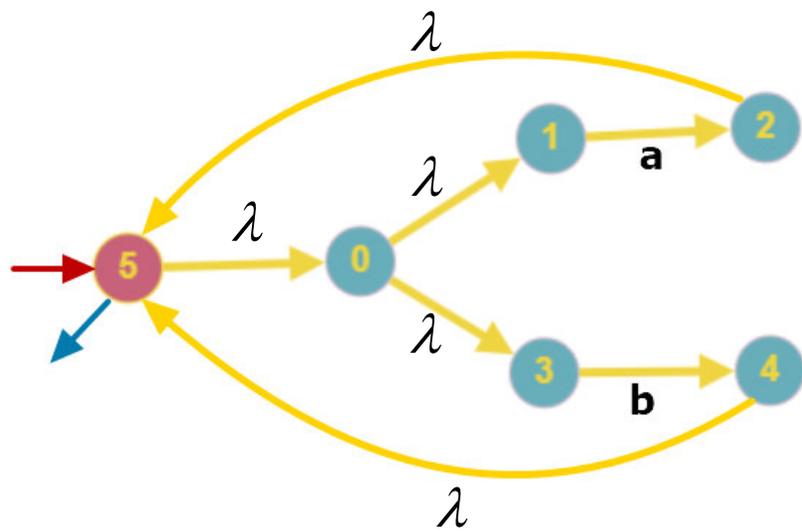


Язык $a \cup b$ задан автоматом:

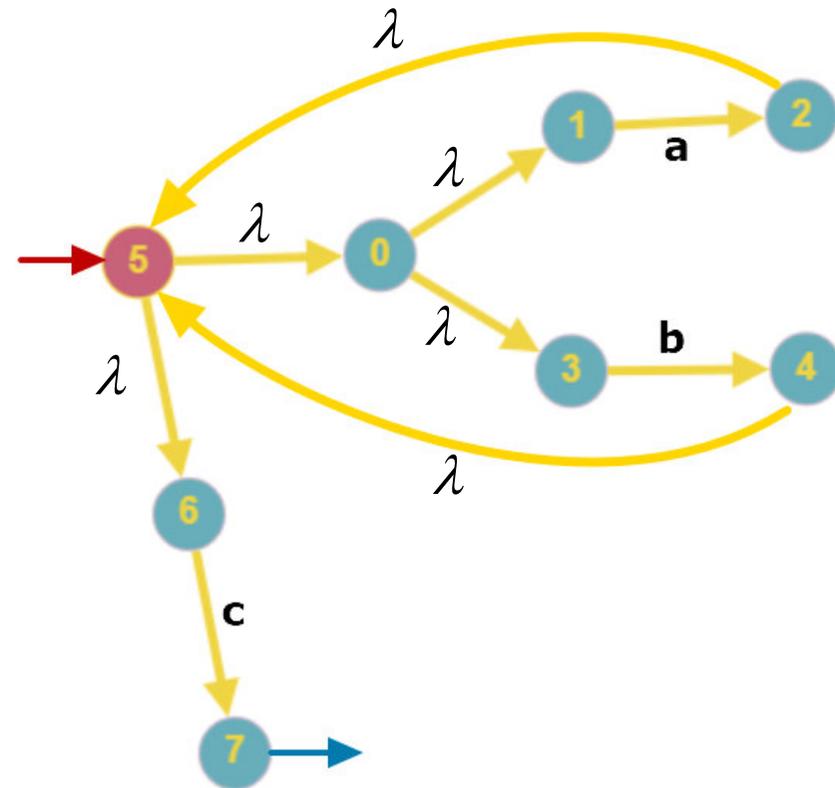


Построение λ –НКА для решения ЗАДАЧИ 5 (способ)

Язык $(a \cup b)^*$ задан автоматом:

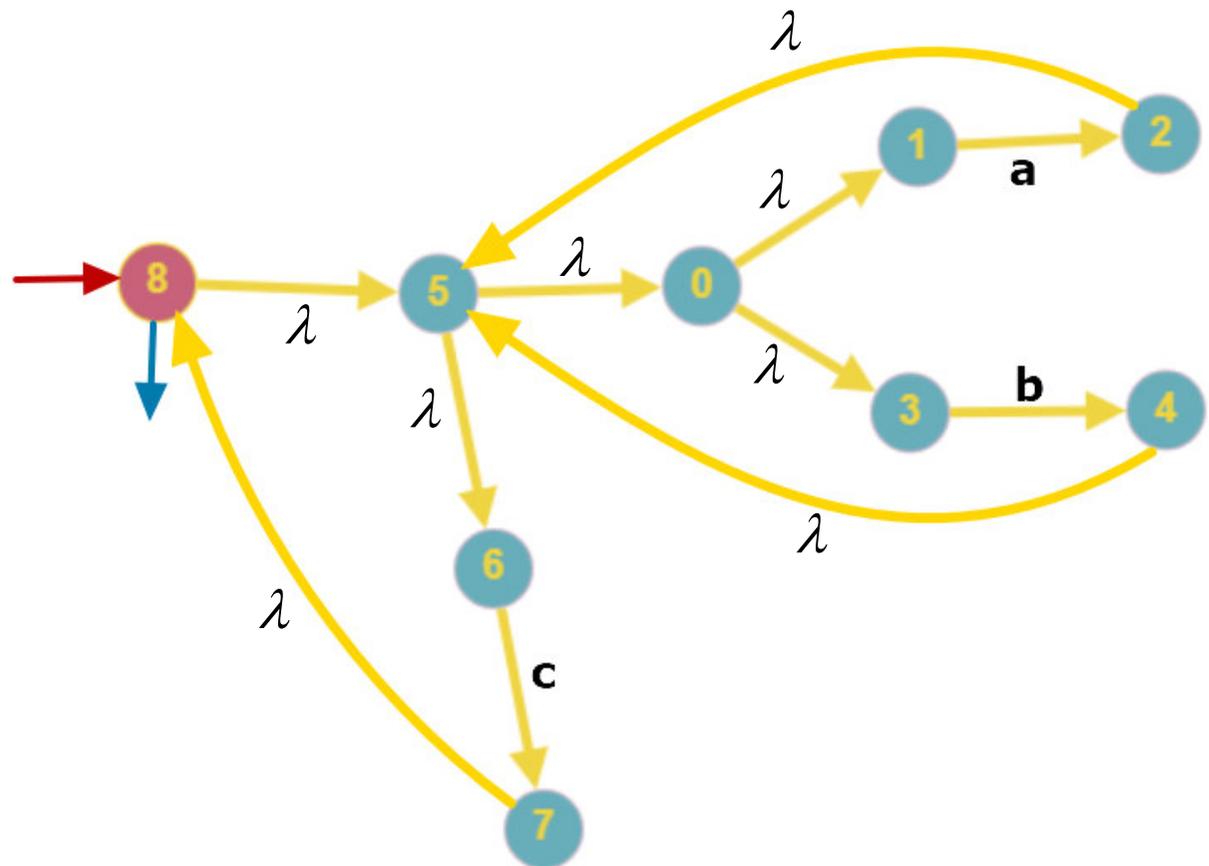


Язык $(a \cup b)^*c$ задан автоматом:



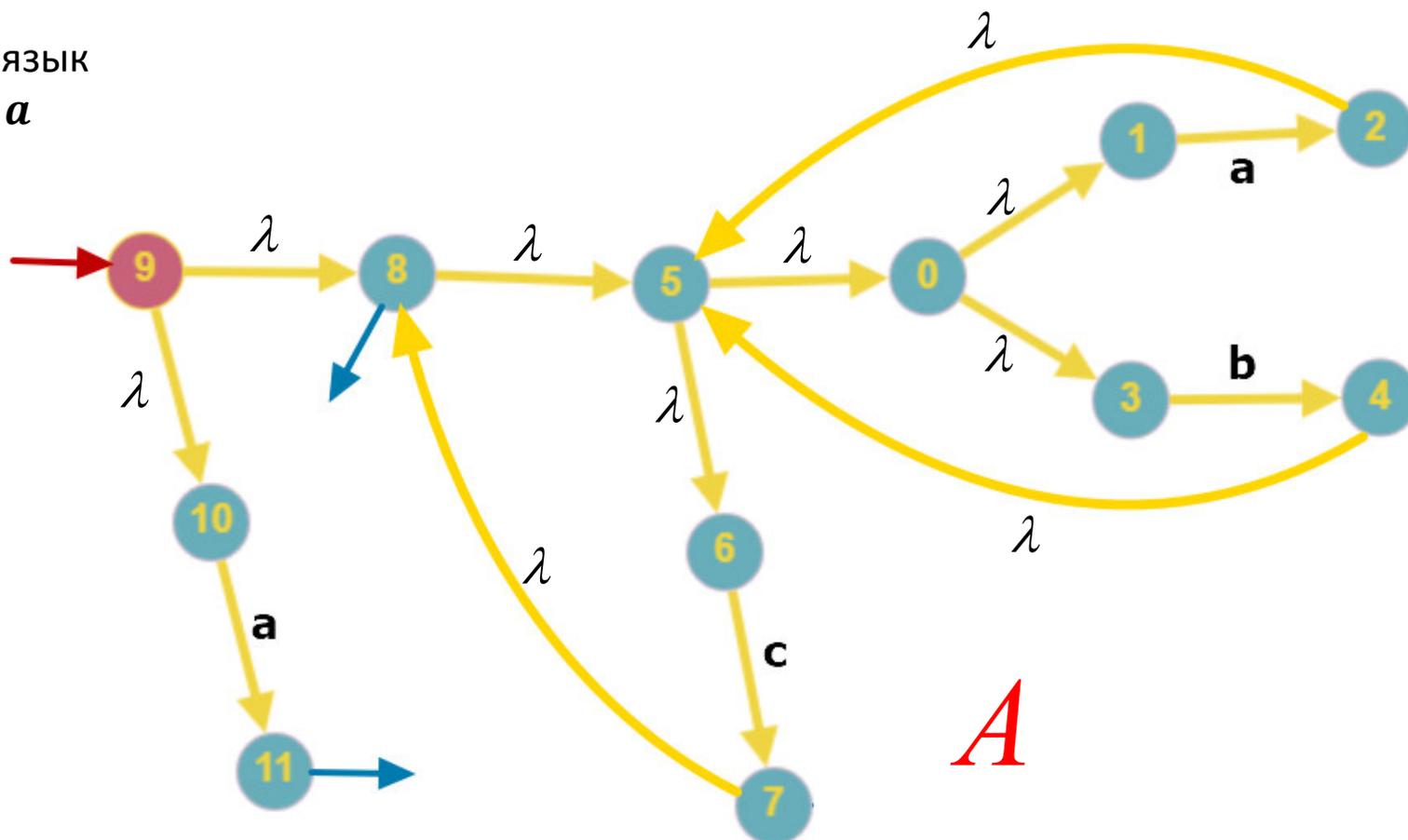
Построение λ –НКА для решения ЗАДАЧИ 5

Язык $((a \cup b)^*c)^*$ задан автоматом:



Построение λ -НКА для решения ЗАДАЧИ 5

Наконец, искомый язык
 $L = ((a \cup b)^* c)^* \cup a$
задан автоматом:



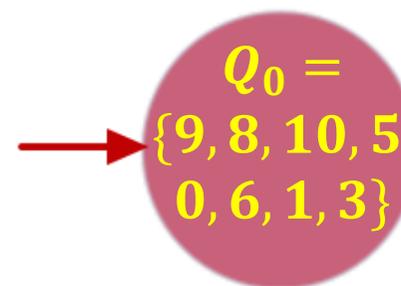
Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

1) Рассмотрим начальную вершину 9 исходного λ -НКА A .
Рассмотрим её λ -замыкание, т.е. множество вершин, включая саму вершину 9, в которую ведут λ -пути из вершины 9:

$\{9\} \xrightarrow{\lambda} \{8,10\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0,6\} \xrightarrow{\lambda} \{1,3\}$ (поиск в ширину).

Это множество вершин $Q_0 = \{9,8,10,5,0,6,1,3\}$, оно будет начальной вершиной искомого ДКА A' .

Обозначение: $\text{Closure}(\{9\}) = Q_0 = \{9,8,10,5,0,6,1,3\}$.



Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

2.1) Рассмотрим множество вершин в автомате A , в которые ведут дуги из вершин множества Q_0 , помеченные буквой a .

Это множество вершин $\{11,2\}$

(поскольку $10.a = 11$, $1.a = 2$,

а из других вершин множества Q_0 дуг, помеченных буквой a , нет).

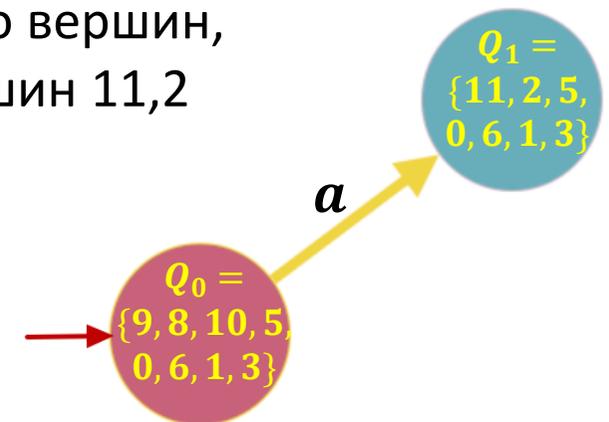
Обозначение: $Q_0 \xrightarrow{a} \{11,2\}$

Рассмотрим λ -замыкание этого множества, т.е. множество вершин, включая эти вершины $11,2$, в которые ведут λ -пути из вершин $11,2$

($\{2\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0,6\} \xrightarrow{\lambda} \{1,3\}$ (поиск в ширину)).

Это множество вершин $Q_1 = \{11,2,5,0,6,1,3\}$.

Обозначение: $\text{Closure}(\{11,2\}) = \{11,2,5,0,6,1,3\}$.



Таким образом, в новом ДКА A' , $Q_0.a = Q_1 = \{11,2,5,0,6,1,3\}$.

Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

2.2) Аналогично, $Q_0 \xrightarrow{b} \{4\}$ (поскольку $3.b = 4$)

$$\text{Closure}(\{4\}) = \{4, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$(\{4\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

$$Q_0.b = Q_2 = \{4, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

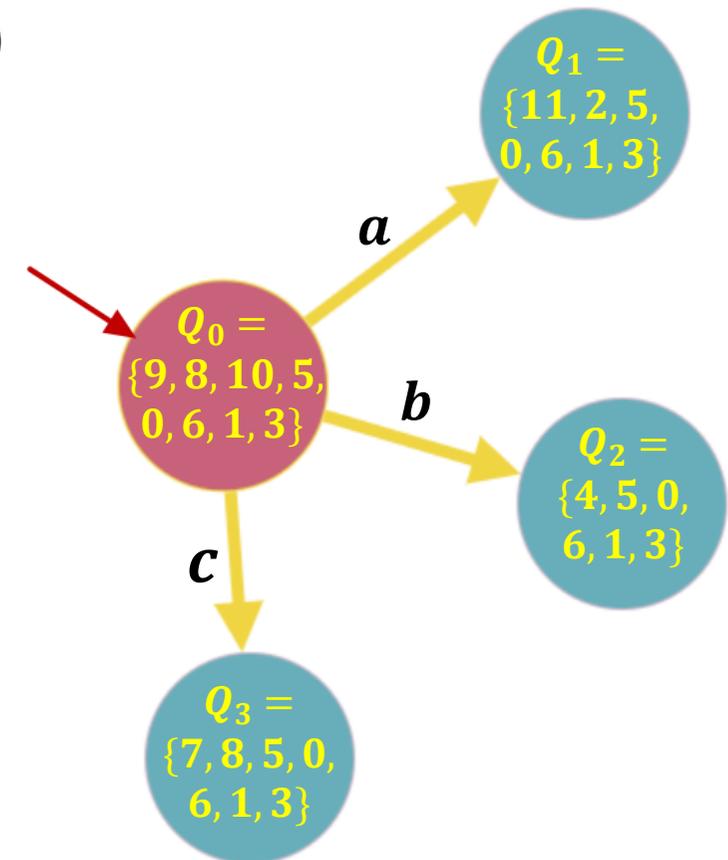
2.3) $Q_0 \xrightarrow{c} \{7\}$ (поскольку $6.c = 7$)

$$\text{Closure}(\{7\}) = \{7, 8, 5, 0, 1, 3\}$$

$(\{7\} \xrightarrow{\lambda} \{8\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

$$Q_0.c = Q_3 = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

Будем получать новые вершины в автомате A' , переходя по стрелкам как в п.2.1-2.3 из уже имеющихся, пока не получим полный ДКА.



Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

3.1) $Q_1 \xrightarrow{a} \{2\}$ (поскольку 1. $a = 2$)

$$\text{Closure}(\{2\}) = \{2, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$(\{2\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

$$Q_1 \cdot a = Q_4 = \{2, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

3.2) $Q_1 \xrightarrow{b} \{4\}$ (поскольку 3. $b = 4$)

$$\text{Closure}(\{4\}) = \{4, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$(\{4\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

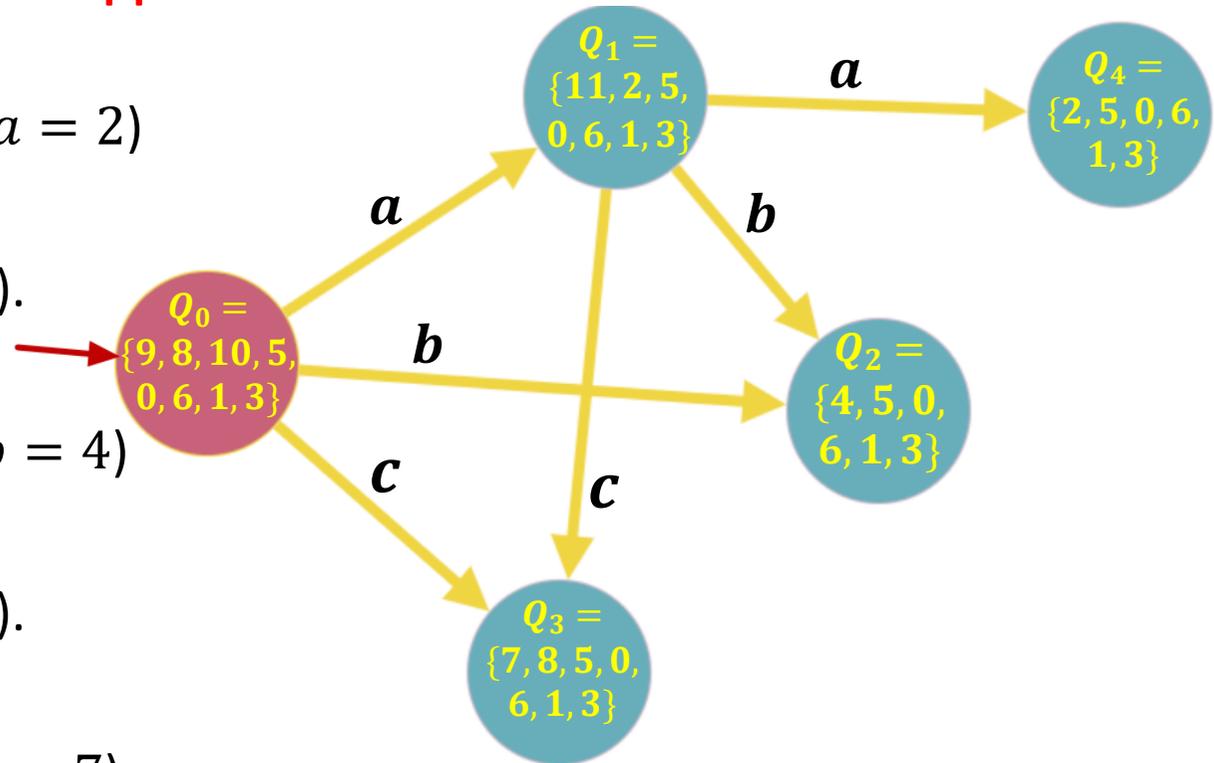
$$Q_1 \cdot b = Q_2 = \{4, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

3.3) $Q_1 \xrightarrow{c} \{7\}$ (поскольку 6. $c = 7$)

$$\text{Closure}(\{7\}) = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$(\{7\} \xrightarrow{\lambda} 8 \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

$$Q_1 \cdot c = Q_3 = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$$



Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

4.1) $Q_2 \xrightarrow{a} \{2\}$ (поскольку $1.a = 2$)

$\text{Closure}(\{2\}) = \{2,5,0,6,1,3\}$

$(\{2\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0,6\} \xrightarrow{\lambda} \{1,3\})$.

$Q_2.a = Q_4 = \{2,5,0,6,1,3\}$

4.2) $Q_2 \xrightarrow{b} \{4\}$ (поскольку $3.b = 4$)

$\text{Closure}(\{4\}) = \{4,5,0,6,1,3\}$

$(\{4\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0,6\} \xrightarrow{\lambda} \{1,3\})$.

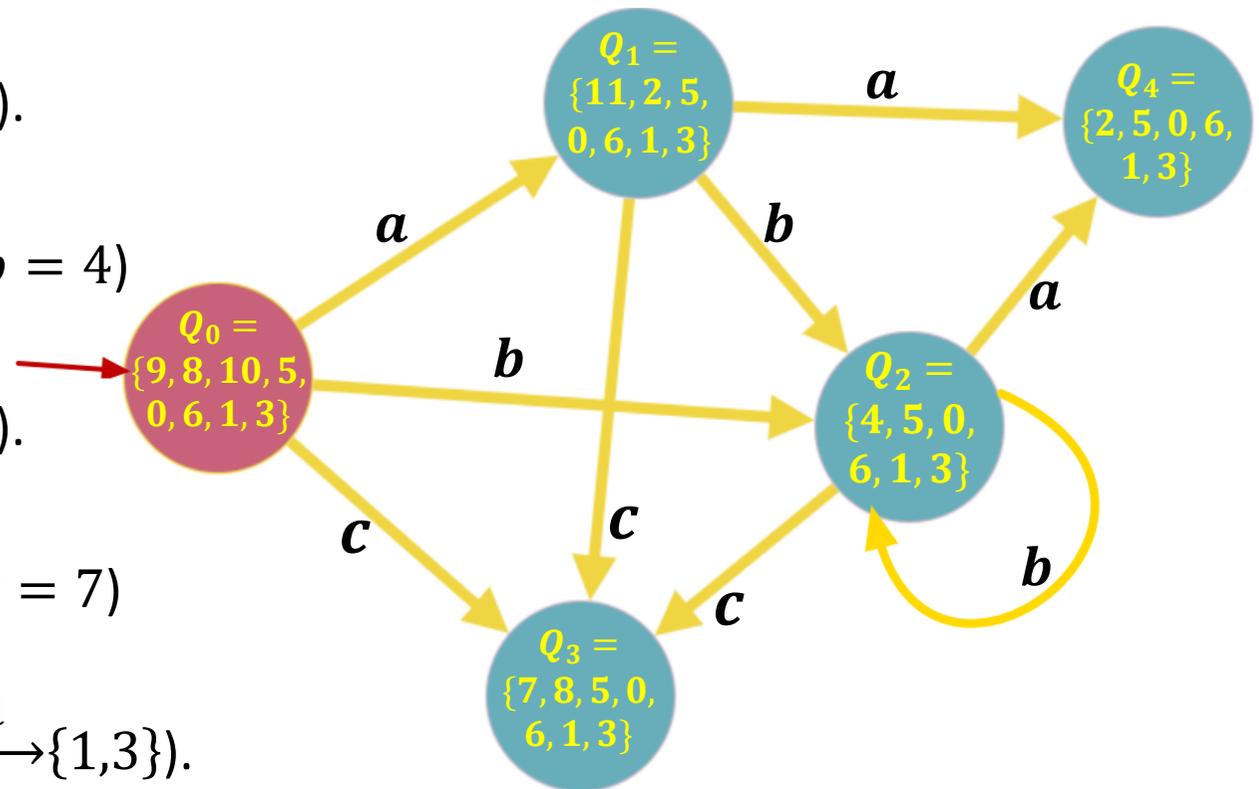
$Q_2.b = Q_2 = \{4,0,1,3,5\}$

4.3) $Q_2 \xrightarrow{c} \{7\}$ (поскольку $6.c = 7$)

$\text{Closure}(\{7\}) = \{7,8,5,0,6,1,3\}$

$(\{7\} \xrightarrow{\lambda} \{8\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0,6\} \xrightarrow{\lambda} \{1,3\})$.

$Q_2.c = Q_3 = \{7,8,5,0,6,1,3\}$



Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

5.1) $Q_3 \xrightarrow{a} \{2\}$ (поскольку 1. $a = 2$)

$\text{Closure}(\{2\}) = \{2, 5, 0, 6, 1, 3\}$

$(\{2\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

$Q_3 \cdot a = Q_4 = \{2, 5, 0, 6, 1, 3\}$

5.2) $Q_3 \xrightarrow{b} \{4\}$ (поскольку 3. $b = 4$)

$\text{Closure}(\{4\}) = \{4, 5, 0, 6, 1, 3\}$

$(\{4\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

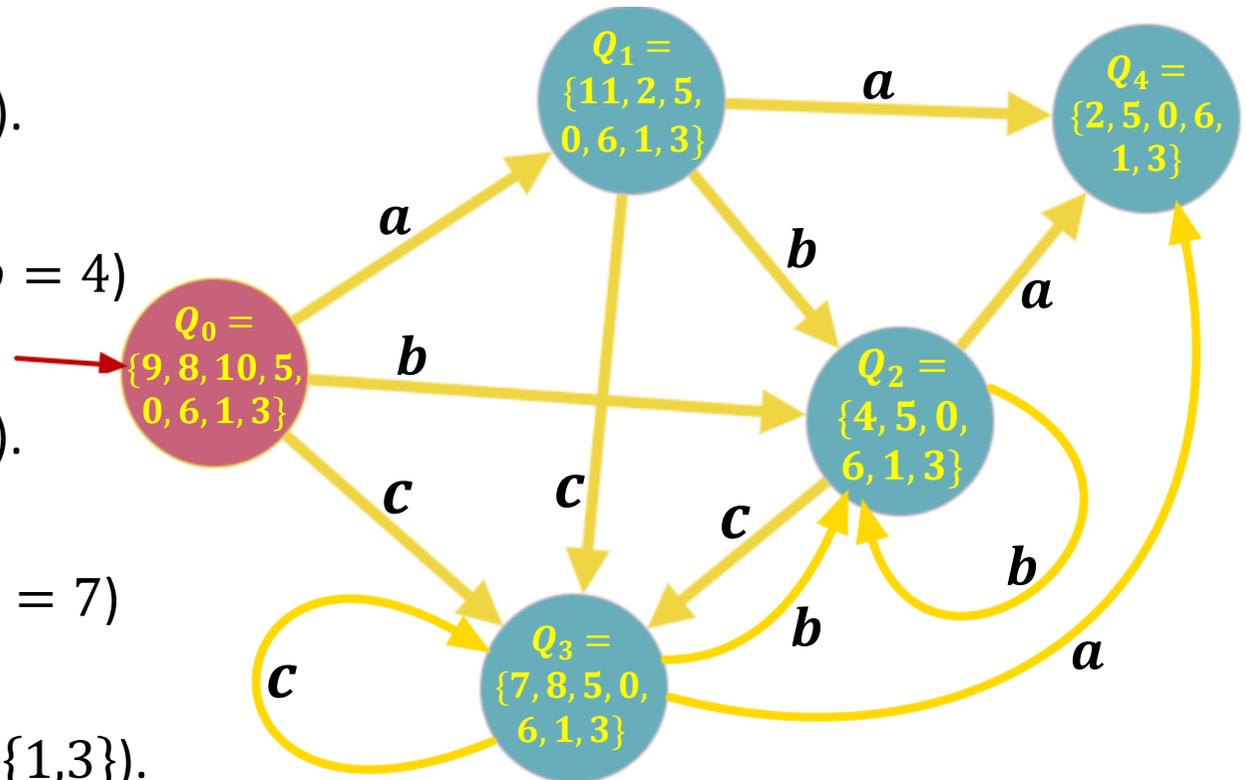
$Q_3 \cdot b = Q_2 = \{4, 0, 1, 3, 5\}$

5.3) $Q_3 \xrightarrow{c} \{7\}$ (поскольку 6. $c = 7$)

$\text{Closure}(\{7\}) = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$

$(\{7\} \xrightarrow{\lambda} 8 \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\})$.

$Q_3 \cdot c = Q_3 = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$



Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

6.1) $Q_4 \xrightarrow{a} \{2\}$ (поскольку 1. $a = 2$)

$$\text{Closure}(\{2\}) = \{2, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$$(\{2\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\}).$$

$$Q_4 \cdot a = Q_4 = \{2, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

6.2) $Q_4 \xrightarrow{b} \{4\}$ (поскольку 3. $b = 4$)

$$\text{Closure}(\{4\}) = \{4, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$$(\{4\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\}).$$

$$Q_4 \cdot b = Q_2 = \{4, 0, 1, 3, 5\}$$

6.3) $Q_4 \xrightarrow{c} \{7\}$ (поскольку 6. $c = 7$)

$$\text{Closure}(\{7\}) = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

$$(\{7\} \xrightarrow{\lambda} \{8\} \xrightarrow{\lambda} \{5\} \xrightarrow{\lambda} \{0, 6\} \xrightarrow{\lambda} \{1, 3\}).$$

$$Q_4 \cdot c = Q_3 = \{7, 8, 5, 0, 6, 1, 3\}$$

Итак, мы получили полный ДКА A' с пятью вершинами Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (см. след. слайд)

Заключительными вершинами автомата A' являются вершины Q_1 и Q_3 , поскольку каждая из них содержит заключительную вершину исходного автомата A : Q_1 содержит вершину 9, а Q_3 содержит вершину 6.

Построение ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

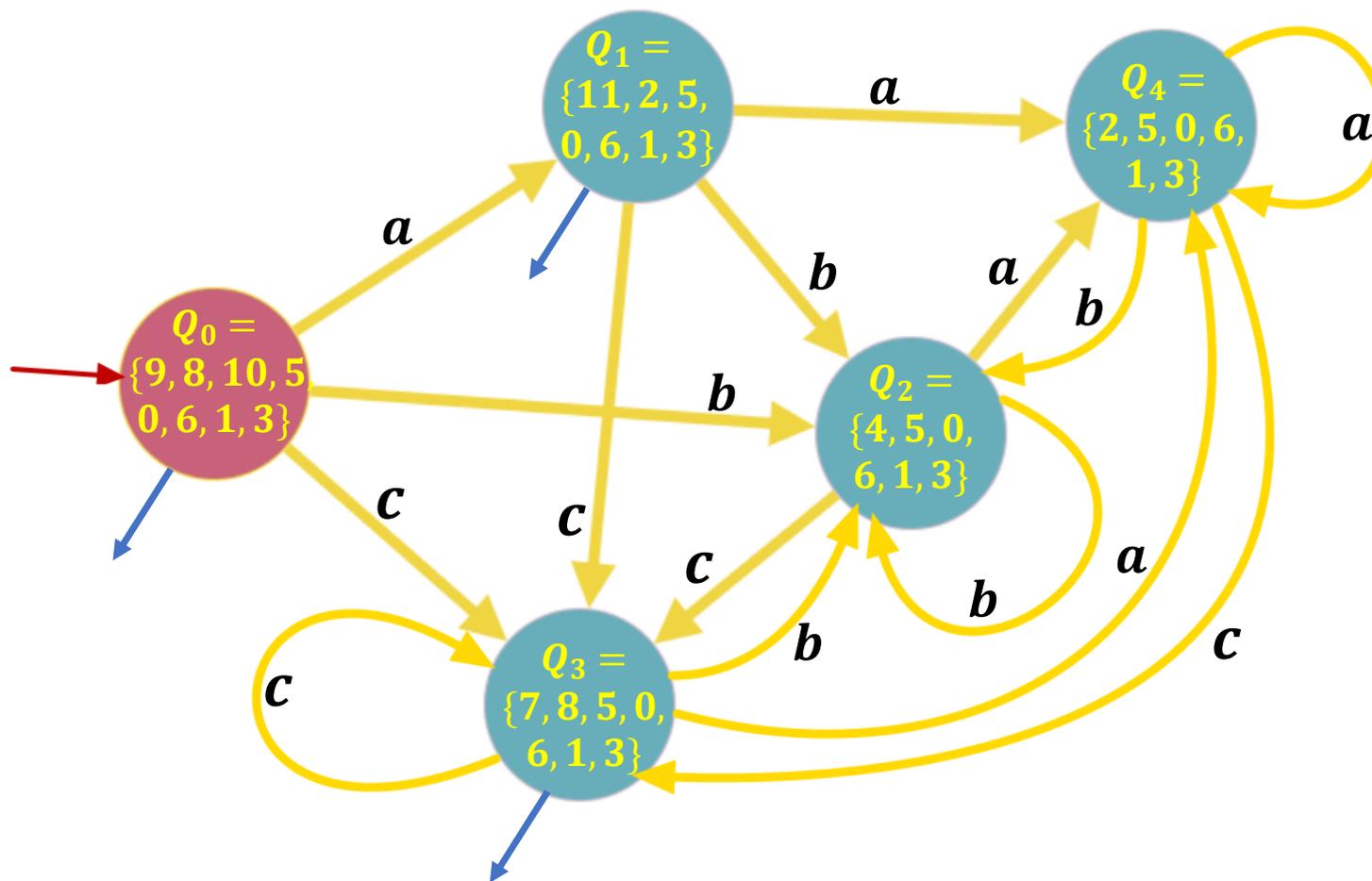


Таблица переходов автомата A'

| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>F</i> |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| Q_0 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | 1 |
| Q_1 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 1 |
| Q_2 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 0 |
| Q_3 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 1 |
| Q_4 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 0 |

A'

Построение приведенного ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

Найдем приведенный ДКА A'' соответствующий автомату A' .

Заметим, что все состояния автомата достижимы.

0) Вначале в очереди два класса: $\{F, Q \setminus F\}$ $Q_0 Q_1 Q_3 \mid Q_2 Q_4$

1) Достаем из начала очереди класс $F = \{Q_0, Q_1, Q_3\}$

$$Q_0 \cdot a \in \{Q_0, Q_1, Q_3\}, \quad Q_0 \cdot b \in \{Q_2, Q_4\}, \quad Q_0 \cdot c \in \{Q_0, Q_1, Q_3\},$$

$$Q_1 \cdot a \in \{Q_2, Q_4\}, \quad Q_1 \cdot b \in \{Q_2, Q_4\}, \quad Q_1 \cdot c \in \{Q_0, Q_1, Q_3\},$$

$$Q_3 \cdot a \in \{Q_2, Q_4\}, \quad Q_3 \cdot b \in \{Q_2, Q_4\}, \quad Q_3 \cdot c \in \{Q_0, Q_1, Q_3\},$$

Разделяем класс $Q_0 \mid Q_1 Q_3$.

Отправляем новые класс в конец очереди $Q_2 Q_4 \mid Q_0 \mid Q_1 Q_3$

2) Достаем из начала очереди класс $\{Q_2, Q_4\}$

$$Q_2 \cdot a \in \{Q_2, Q_4\} \quad Q_2 \cdot b \in \{Q_2, Q_4\} \quad Q_2 \cdot c \in \{Q_1, Q_3\}$$

$$Q_4 \cdot a \in \{Q_2, Q_4\} \quad Q_4 \cdot b \in \{Q_2, Q_4\} \quad Q_4 \cdot c \in \{Q_1, Q_3\}$$

Класс разделять не нужно.

Отправляем этот класс в конец очереди: $Q_0 \mid Q_1 Q_3 \mid Q_2 Q_4$

Таблица переходов автомата A'

| | a | b | c | F |
|-------|-------|-------|-------|-----|
| Q_0 | Q_1 | Q_2 | Q_3 | 1 |
| Q_1 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 1 |
| Q_2 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 0 |
| Q_3 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 1 |
| Q_4 | Q_4 | Q_2 | Q_3 | 0 |

Построение приведенного ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

1) Достаем из начала очереди последовательно классы $\{Q_0\}$, $\{Q_1, Q_3\}$.

Разделять их не надо. Действительно, класс $\{Q_0\}$ одноэлементный, а в классе $\{Q_1, Q_3\}$

$$Q_1 \cdot a = Q_3 \cdot a, \quad Q_1 \cdot b = Q_3 \cdot b, \quad Q_1 \cdot c = Q_3 \cdot c.$$

Отправляем их в конец очереди $Q_2 \ Q_4 \mid Q_0 \mid Q_1 \ Q_3$

2) Достаем из начала очереди класс $\{Q_2, Q_4\}$

$$Q_2 \cdot a = Q_4 \cdot a \quad Q_2 \cdot b = Q_4 \cdot b \quad Q_2 \cdot c = Q_4 \cdot c$$

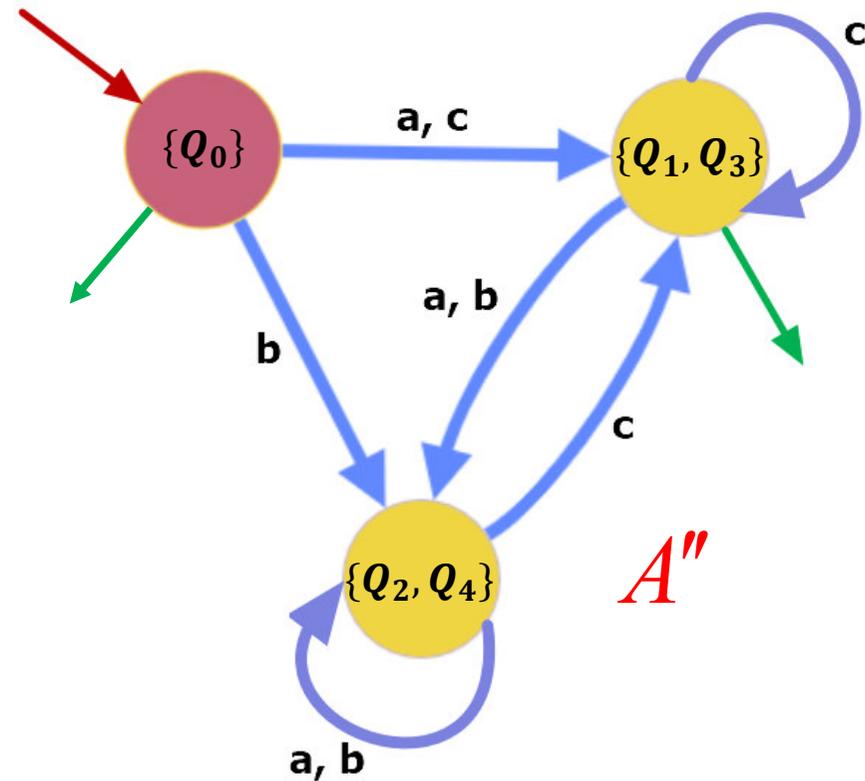
Следовательно, разделят класс $\{Q_2, Q_4\}$ не нужно.

Искомое разбиение по конгруэнции $Q_0 \mid Q_1 \ Q_3 \mid Q_2 \ Q_4$

Построение приведенного ДКА для решения ЗАДАЧИ 5

Таблица переходов автомата A''

| | a | b | c | F |
|----------|----------|----------|----------|-----|
| Q_0 | Q_1Q_3 | Q_2Q_4 | Q_1Q_3 | 1 |
| Q_1Q_3 | Q_2Q_4 | Q_2Q_4 | Q_1Q_3 | 1 |
| Q_2Q_4 | Q_2Q_4 | Q_2Q_4 | Q_1Q_3 | 0 |



Автомат A'' является искомым приведенным ДКА.