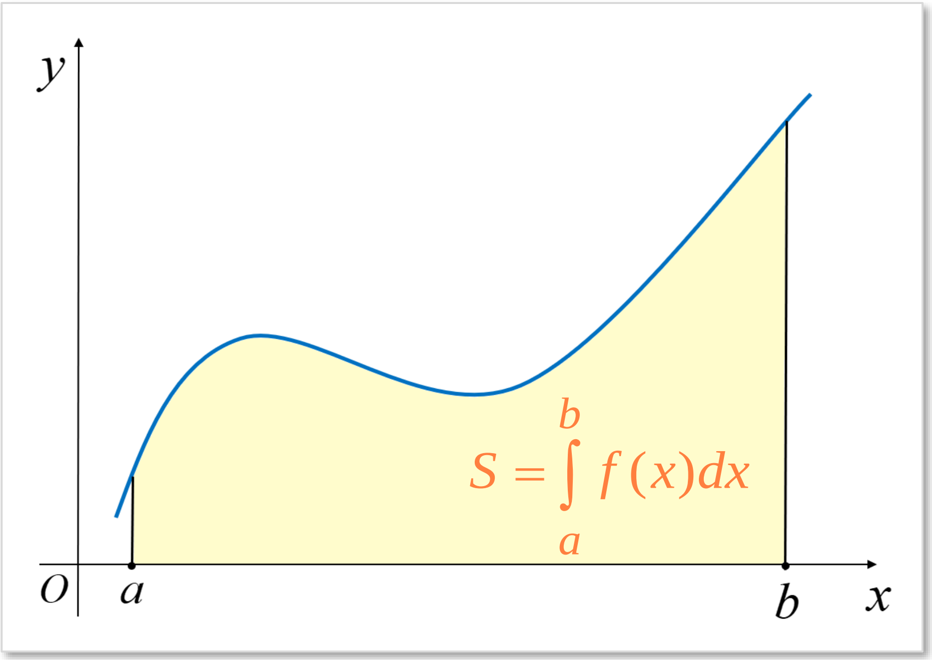
Вычисление площади

Если $f(x)$ — неотрицательная интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, S — площадь криволинейной трапеции под ее графиком, то

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

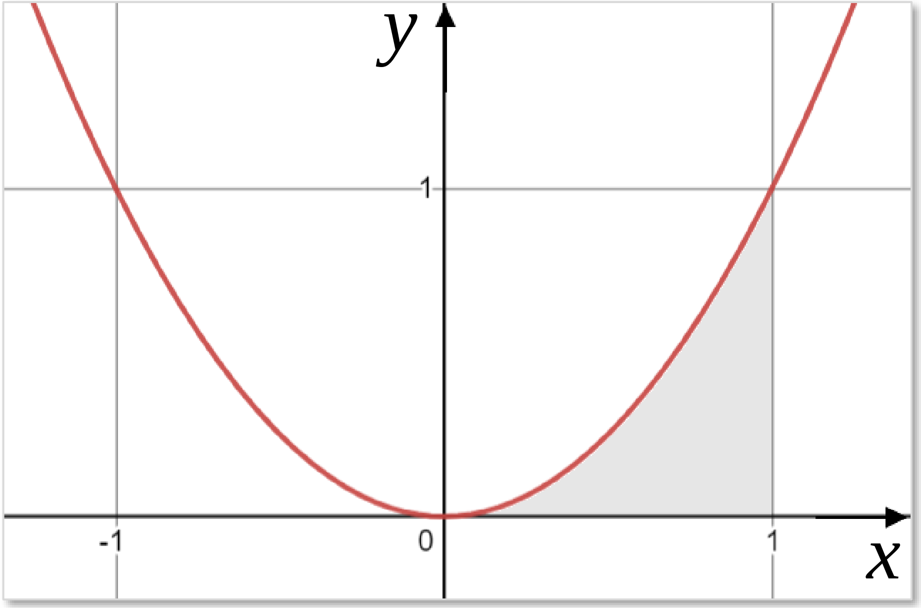


Вычисление площади. Пример 1

Пример 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

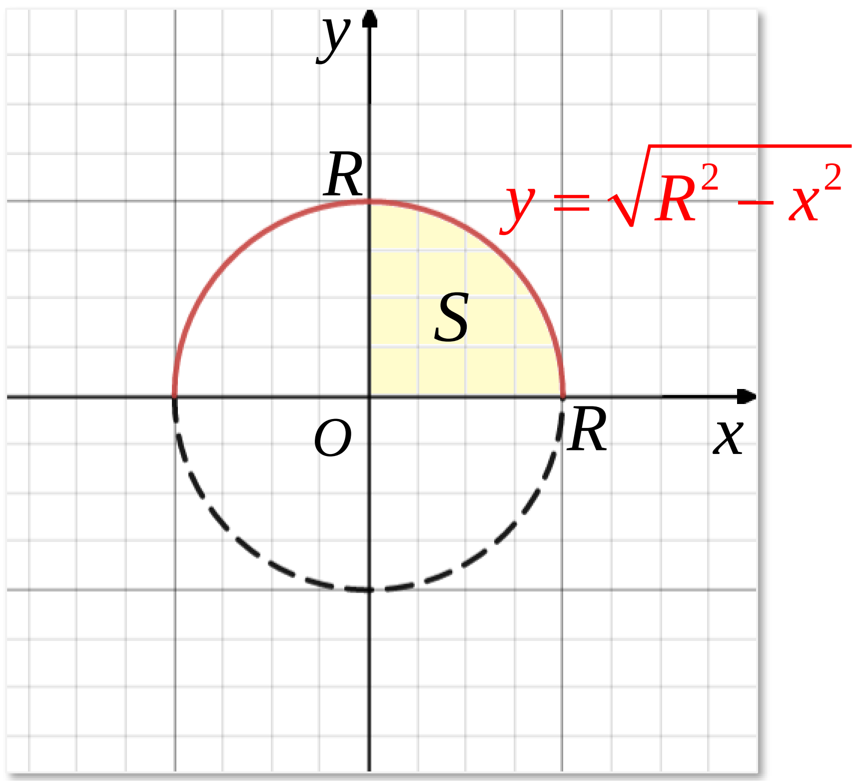


Вычисление площади. Пример 2

Пример 2. Вычислить площадь круга радиуса R.

Решение.

$$S_{круга} = 4S$$



Вычисление площади. Пример 2

$$S=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=R\sin t \\ dx=R\cos t\,dt \\ x=0\Rightarrow\sin t=0\Rightarrow t=0 \\ x=R\Rightarrow\sin t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\,R\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2(1-\sin^2 t)}\,R\cos t dt=$$

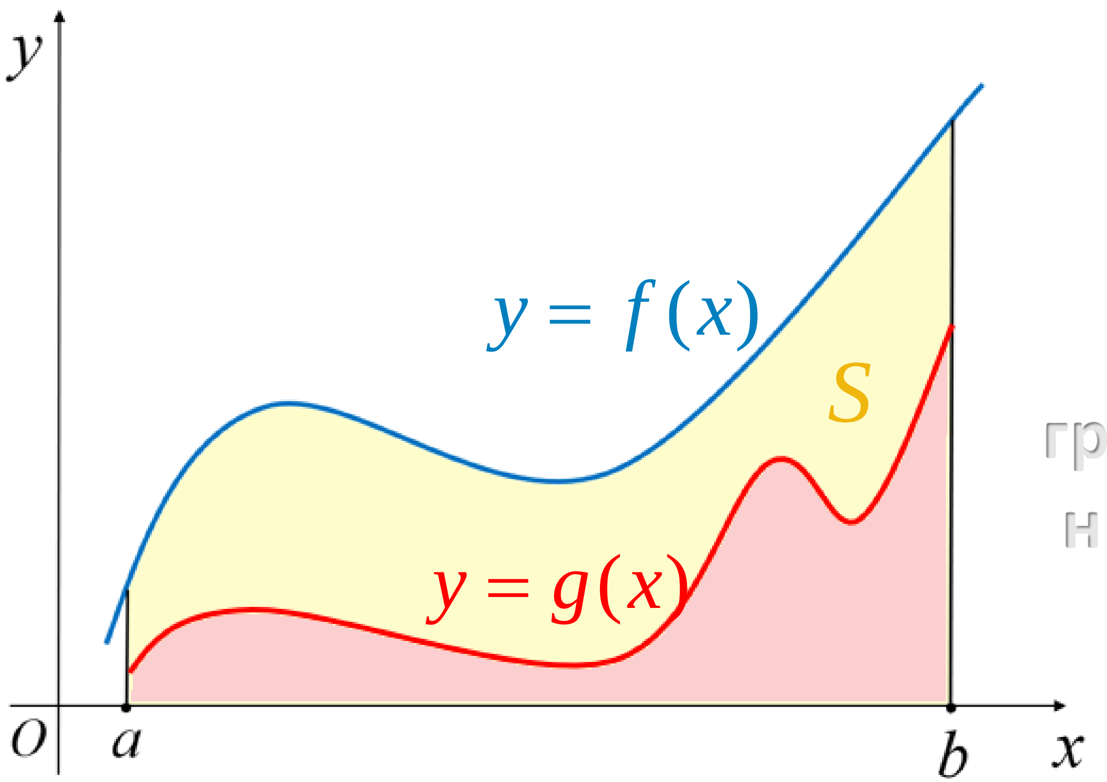
Вычисление площади. Пример 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2} - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right)\right) =$$

$$= \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow \; S_{круга} = 4S = \pi R^2$$

Вычисление площади



из верхнего графика вычесть нижний график

Если $f(x) \geq g(x)$, на $[a,b]$, то

$$\boxed{S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx}$$

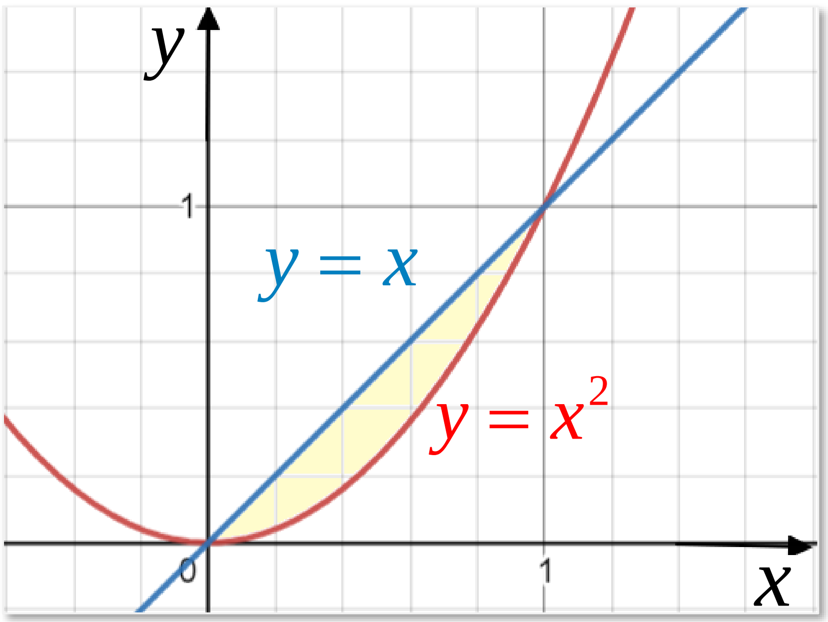
Вычисление площади. Пример 3

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,\ y = x^2$.

Решение. Найдем точки пересечения линий $y = x,\ y = x^2$:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0, x = 1.$$

$$f(x) = x,\ g(x) = x^2 \Rightarrow$$



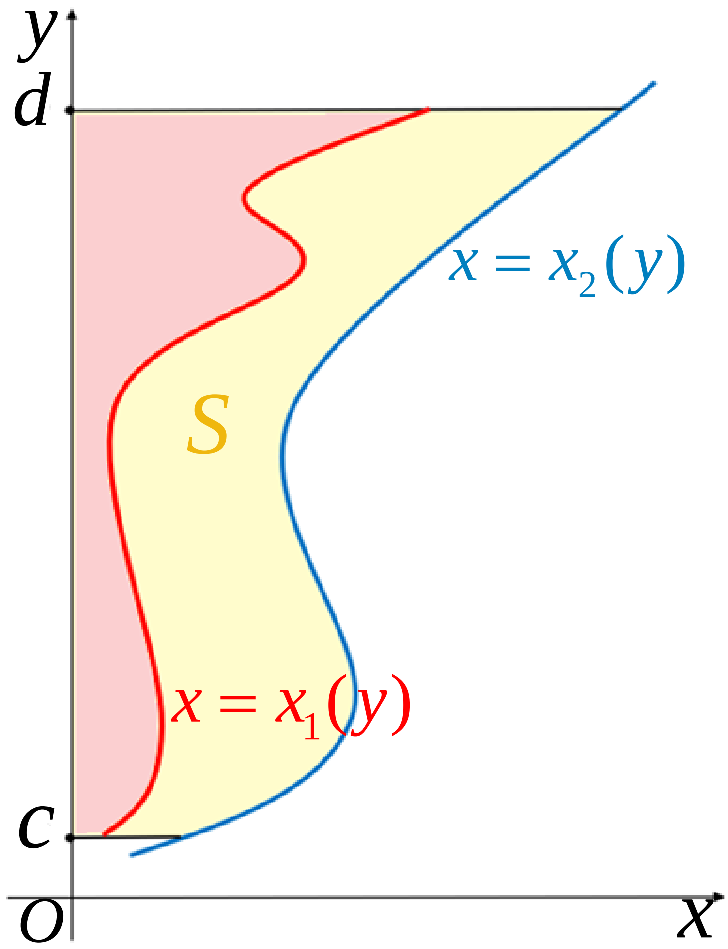
Вычисление площади. Пример 3

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx =$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$$

Вычисление площади



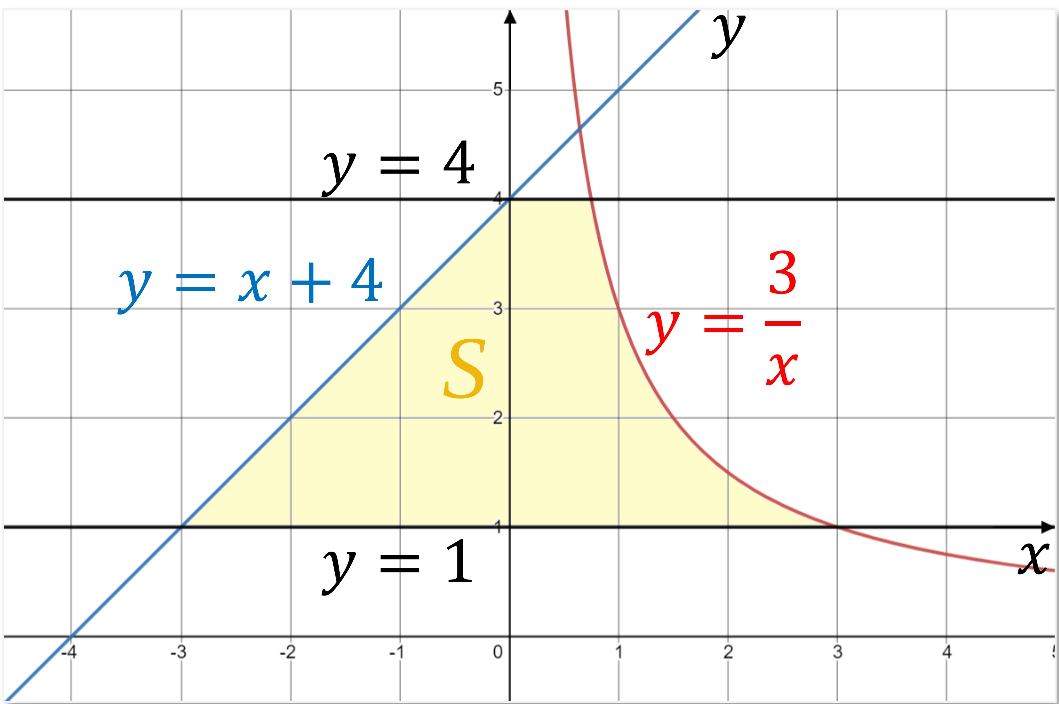
Если $x_2(y) \geq x_1(y)$, на $[c,d]$, то

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy}$$

из правого графика вычесть левый график

Вычисление площади. Пример 4

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 3,\ y = x + 4, y = 1, y = 4.$



$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{y}$$

$$y = x + 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = y - 4$$

Вычисление площади. Пример 4

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{3}{y} - (y - 4)\right) dy = \left(3\ln|y| - \frac{y^2}{2} + 4y\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \left(3\ln|4| - \frac{16}{2} + 16\right) - \left(3\ln|1| - \frac{1}{2} + 4\right) =$$

$$= \left(3\ln 4 + \frac{16}{2}\right) - \frac{7}{2} = 3\ln 4 + \frac{9}{2}$$

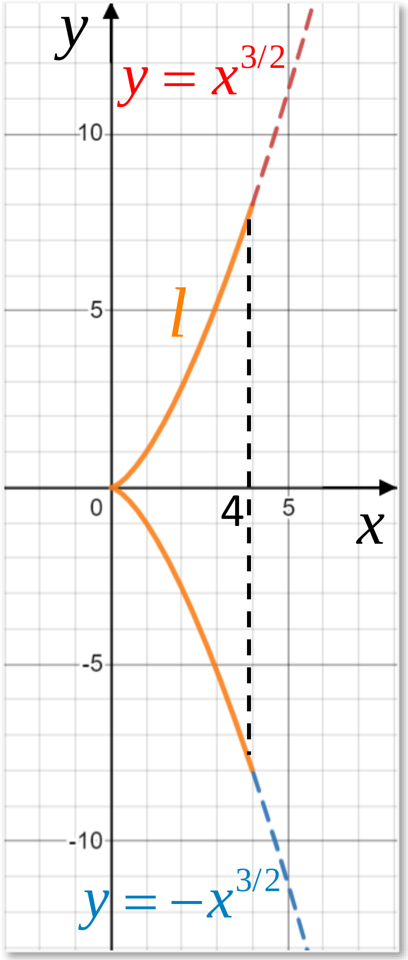
Вычисление длины кривой – дуги графика функции

Теорема 1. Если $f(x)$ – непрерывно дифференц. функция, определенная на отрезке $[a;b]$, то ее длина находится по формуле

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}\, dx}$$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции. Пример 5

<ins>Пример 5</ins>. Найти длину полукубической параболы
$y^2 = x^3,\ 0 \le x \le 4.$



<ins>Решение</ins>. По условию
$y^2 = x^3,\ x \ge 0 \Rightarrow y = \pm x^{3/2}$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции. Пример 5

Так эта парабола симметрична относительно оси Оx, то длина всей линии будет равна:

$$l = 2\int_0^4 \sqrt{1+\left[y'\right]^2}\,dx, \text{ где } y = x^{3/2}$$

$$l = 2\int_0^4 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{x}\right]^2}\,dx = 2\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx =$$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции. Пример 5

$$= 2\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+\dfrac{9}{4}x \\ dt = \dfrac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \dfrac{4}{9}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = 10 \end{array}\right] = \frac{8}{9}\int_1^{10} \sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{8}{9}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{10} = \frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{t}\right)^3\Bigg|_1^{10} = \frac{16}{27}\cdot\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически

Теорема 2. Если плоская кривая задается параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

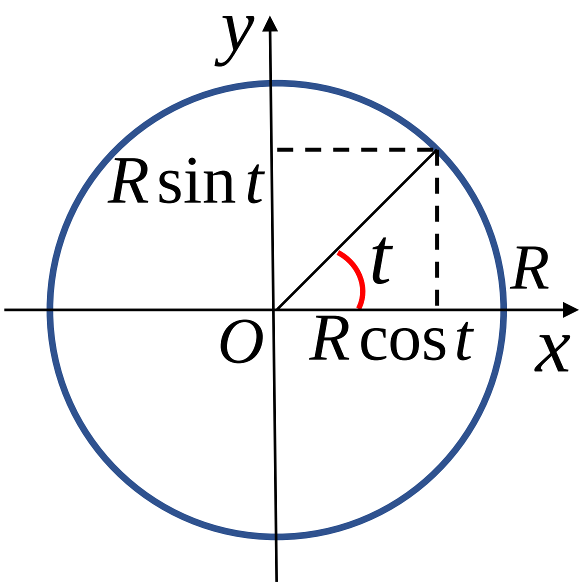
где функции $x(t)$, $y(t)$ — непрерывно дифференцируемы, то её длина равна:

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt}$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически. Пример 6

Пример 6. Найти длину окружности.

Решение. Параметрически окружность радиуса R задается уравнениями



$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{cases} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \end{cases}$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически. Пример 6

Следовательно,

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\left(-R\sin t\right)^2 + \left(R\cos t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = R$$

$$l_{окружн.} = R\int_0^{2\pi} dt = R\,t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

Вычисление длины пространственной кривой, заданной параметрически

Теорема 3. Если пространственная кривая задается параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$

где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывно дифференцируемы, то её длина равна:

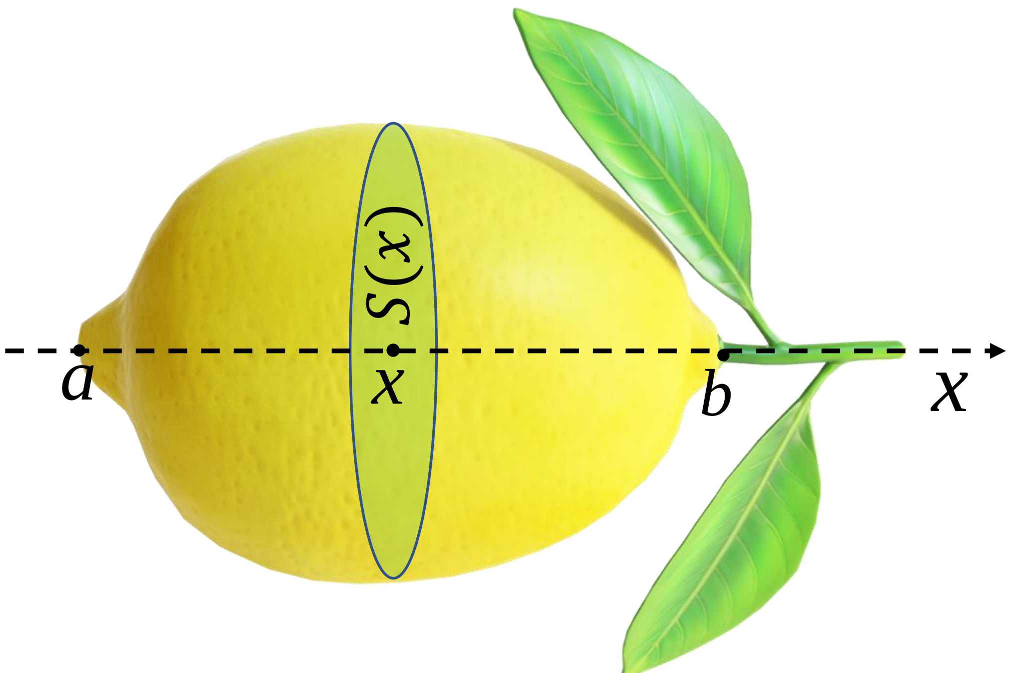
$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt}$$

Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям

Теорема 4. Пусть дано некоторое тело с объемом V, причем для любого x фигура, полученная в сечении тела плоскостью $x = const$, имеет площадь $S(x)$, $a \le x \le b$.
Предположим также, что функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям



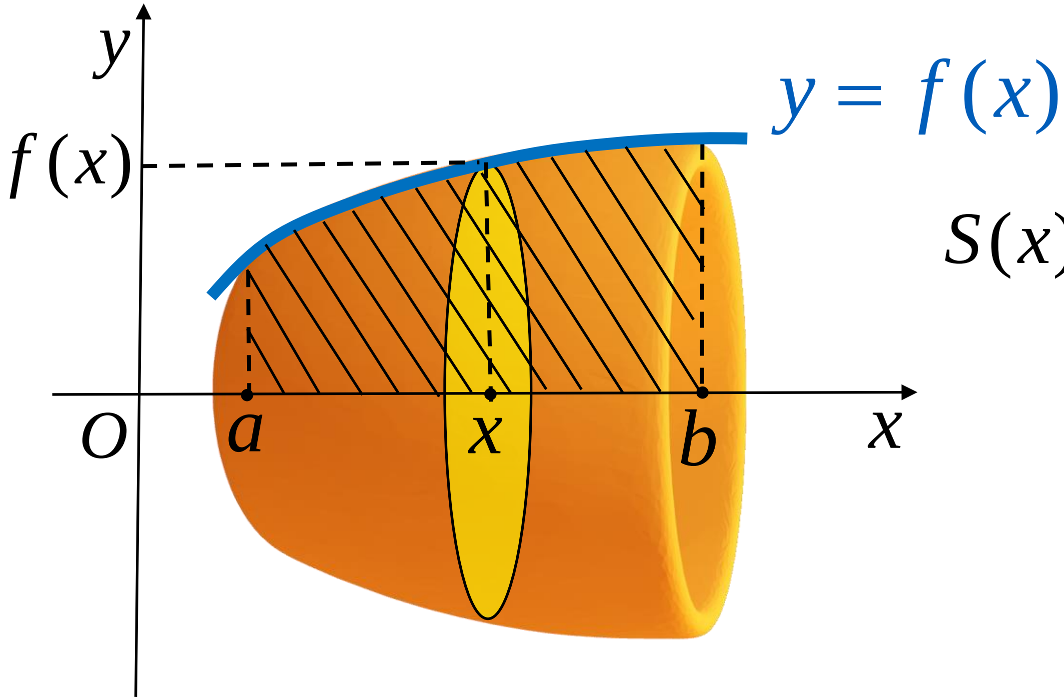
$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапецией под графиком функции $y = y(x) = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда его объем равен

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx}$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*



$$S(x) = \pi R^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

$$\Downarrow$$

$$V = \int_a^b S(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \pi y^2(x)\,dx \;\blacksquare$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*. Пример 7

Пример 7. Найти объем шара.

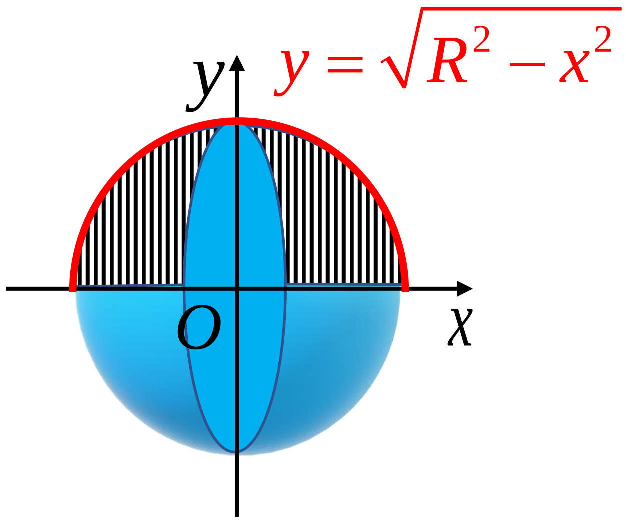
Решение. Шар получается при вращении половины круга вокруг оси Ox. Поэтому

Уравнение верхней границы:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}, \quad -R\le x\le R$$

$$V_{шара}=V_x=\pi\int_{-R}^{R}y^2(x)dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*. Пример 7



$$=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(\int_{-R}^{R}R^2\,dx-\int_{-R}^{R}x^2\,dx\right)=$$

$$=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\left(\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left((-R)^3-\frac{(-R)^3}{3}\right)\right)$$

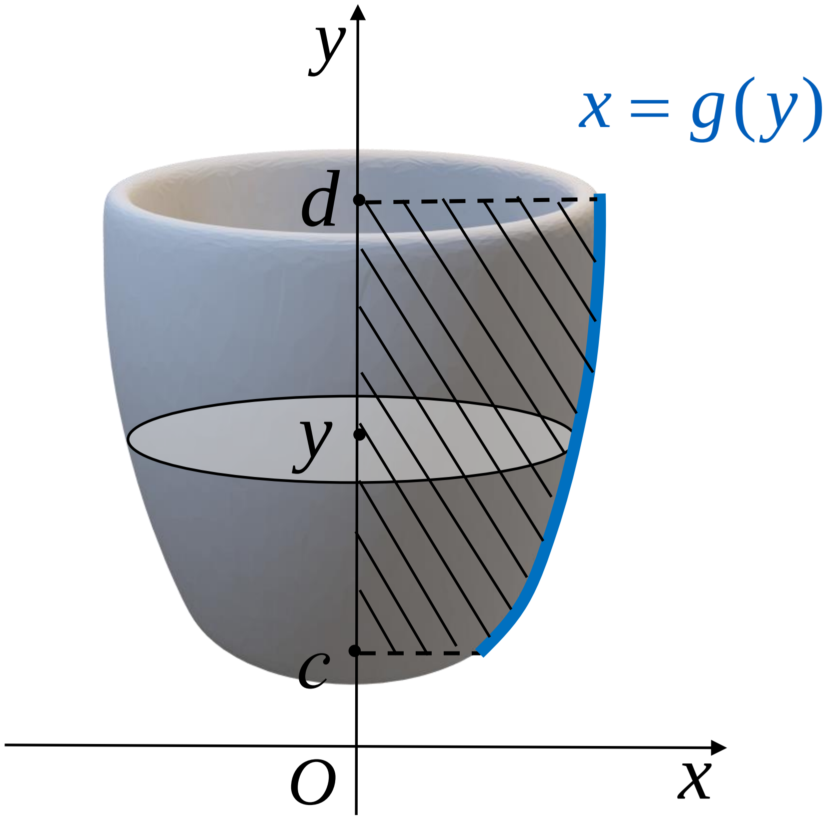
$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-\frac{2}{3}(-R)^3\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Oy*

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапецией под графиком функции $x = x(y) = g(y)$ на отрезке $[c, d]$. Тогда его объем равен

$$\boxed{V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy = \pi\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy}$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси Oy



$$S(y) = \pi R^2 = \pi\left[g(y)\right]^2$$

$$\Downarrow$$

$$V = \int_c^d S(y)\,dy =$$

$$= \int_c^d \pi x^2(y)\,dy \quad \blacksquare$$

Задача о вычислении объема тела вращения. Пример 8

<u>Пример 8.</u> Найти объем тела вращения вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной, линиями

$$y = x^2, y = 1, y = 4.$$

<u>Решение.</u> $y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y} \Longrightarrow$

$$V_y = \pi \int_1^4 x^2(y)dy = \pi \int_1^4 \left[\sqrt{y}\right]^2 dy =$$

$$= \pi \int_1^4 y\,dy = \pi \frac{y^2}{2}\bigg|_1^4 = \pi\left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$$

Задача о вычислении объема тела вращения. Пример 8