Тема 9: Классификация квадрик на плоскости

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Теорема

С помощью преобразования прямоугольной декартовой системы координат (поворота и параллельного переноса) общее уравнение квадрики на плоскости $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ может приведено к одному из следующих видов:

1. $ax'^2 + by'^2 + c = 0,\ a, b \neq 0;$
2. $ax'^2 + by' = 0$ или $ax' + by'^2 = 0,\ a, b \neq 0;$
3. $ax'^2 + c = 0$ или $by'^2 + c = 0,\ a, b \neq 0.$

$\Downarrow$Предположим, что $a_{12} \neq 0$ и докажем, что за счет поворота системы координат на подходящий угол в уравнении квадрики коэффициент при произведении переменных может обратиться в нуль. Для этого подставим в выражение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ выражения x, y из формул сл.32 т.2

$$\begin{cases} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi. \end{cases}$$

Имеем $a_{11}(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + a_{22}(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)^2 = a_{11}(x_1^2\cos^2\varphi - 2x_1y_1\cos\varphi\sin\varphi + y_1^2\sin^2\varphi) + 2a_{12}((x_1^2 - y_1^2)\sin\varphi\cos\varphi + x_1y_1(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)) + a_{22}(x_1^2\sin^2\varphi + 2x_1y_1\sin\varphi\cos\varphi + y_1^2\cos^2\varphi) = (a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)x_1^2 + (2(a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))x_1y_1 + (a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi)y_1^2.$

Напомним, что $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$. С учетом этого положим $a = a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$,
$b = a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$, $d = (a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi$.
Тогда $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = ax_1^2 + dx_1y_1 + by_1^2$.
Выберем φ так, чтобы выполнялось условие $d = 0$. Тогда

$$2a_{12}\cos 2\varphi = (a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi. \tag{1}$$

Предположим, что условие (1) выполнено. Поскольку $a_{12} \neq 0$, также и $\sin 2\varphi \neq 0$, потому что иначе $\cos 2\varphi = 0$, что невозможно. Разделив обе части равенства (1) на $a_{12}\sin 2\varphi$, получим требуемое условие для φ:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{2}$$

После поворота системы координат на угол φ, удовлетворяющий (2), общее уравнение квадрики принимает вид $ax_1^2 + by_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = 0$.
При этом по крайней мере один из коэффициентов a, b отличен от нуля.
Рассмотрим имеющиеся возможности.
I. $a, b \neq 0$. Выделим полные квадраты в левой части уравнения:
$ax_1^2 + by_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = a(x_1 + \frac{f}{a})^2 - \frac{f^2}{a} + b(y_1 + \frac{g}{b})^2 - \frac{g^2}{b} + h =$
$ax'^2 + by'^2 + c$, где $x' = x_1 + \frac{f}{a}$, $y' = y_1 + \frac{g}{b}$, $c = h - \frac{f^2}{a} - \frac{g^2}{b}$. Сделав параллельный перенос системы координат Ox_1y_1 в точку $O_1(-\frac{f}{a}, -\frac{g}{b})$, приведем уравнение квадрики к виду 1.

II. $a \neq 0, b = 0$ или $a = 0, b \neq 0$. Эти ситуации похожи, и для определенности рассмотрим первую из них. Вторая рассматривается аналогично.
Уравнение квадрики принимает вид $ax_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = 0$. Выделим полный квадрат в левой части уравнения:
$ax_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + h = a(x_1 + \frac{f}{a})^2 - \frac{f^2}{a} + 2gy_1 + h$. Положим $x' = x_1 + \frac{f}{a}$, $c = h - \frac{f^2}{a}$. Уравнение квадрики принимает вид $ax'^2 + 2gy_1 + c = 0$. Здесь также возникает две возможности.
II.1. $g \neq 0$. Тогда имеем $ax'^2 + 2gy_1 + h' = ax'^2 + 2g(y_1 + \frac{c}{2g})$. Положим $y' = y_1 + \frac{c}{2g}$ и $b = 2g$. Уравнение примет вид 2. При этом делается параллельный перенос начала координат в точку $O_1(-\frac{f}{a}, -\frac{c}{2g})$.
II.2. $g = 0$. Тогда имеем $ax'^2 + c = 0$. Уравнение имеет вид 3. При этом делается параллельный перенос начала координат в точку $O_1(-\frac{f}{a}, 0)$.$\Uparrow$

О решении задач с помощью поворота системы координат

При решении конкретной задачи о преобразовании уравнения квадрики на плоскости к каноническому виду приходится находить формулы преобразования координат $\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \end{cases}$ зная значение $\operatorname{ctg} 2\varphi$. Для нахождения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ сначала находят $\operatorname{tg}\varphi$, используя формулу $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2\operatorname{tg}\varphi}$, а затем $\cos\varphi$ с помощью формулы $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$. По значениям $\cos\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$ легко находится $\sin\varphi$. Квадратное уравнение для $\operatorname{tg}\varphi$ всегда имеет два решения, произведение которых равно -1. Это означает, что имеется два взаимно перпендикулярных направления новой оси Ox_1. Рекомендуется брать положительное значение $\operatorname{tg}\varphi$ и находить по нему положительные значения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Таким образом, поворот будет осуществляться в первую четверть исходной системы координат.

Теорема

Любая квадрика на плоскости является одним из следующих множеств точек:

1. эллипс;
2. гипербола;
3. парабола;
4. пара пересекающихся прямых;
5. пара параллельных прямых;
6. прямая;
7. точка;
8. пустое множество.

$\Downarrow$В силу теоремы сл.4 достаточно определить геометрические образы уравнений, фигурирующие в этой теореме.
Рассмотрим уравнение $ax^2 + by^2 + c = 0$, где $a, b \neq 0$. Здесь возможны два случая.

Продолжение доказательства теоремы

I.1. $ab > 0$, т.е. числа a, b одного знака. Без ограничения общности предположим, что $a > 0$, $b > 0$. В зависимости от значения c рассмотрим следующие возможности.
I.1.1. $c > 0$. В этом случае геометрический образ — пустое множество, так как $ax^2 + by^2 + c \geq c$.
I.1.2. $c = 0$. В этом случае геометрический образ — точка $O(0, 0)$, так как $ax^2 + by^2 = 0$.
I.1.3. $c < 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + by^2 + c = 0$ равносильно уравнению $\frac{x^2}{-c/a} + \frac{y^2}{-c/b} = 1$. Так как $-c/a, -c/b > 0$, геометрический образ — эллипс.
I.2. $ab < 0$, т.е. числа a, b разных знаков. Без ограничения общности предположим, что $a > 0$, $b < 0$. В зависимости от значения c рассмотрим следующие возможности.
I.2.1. $c = 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + by^2 = 0$ равносильно уравнению $(\sqrt{a}x - \sqrt{-b}y)(\sqrt{a}x + \sqrt{-b}y) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений $\sqrt{a}x - \sqrt{-b}y = 0$, $\sqrt{a}x + \sqrt{-b}y = 0$. Геометрический образ — пара пересекающихся прямых.
I.2.2. $c \neq 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + by^2 + c = 0$ равносильно уравнению $\frac{x^2}{-c/a} + \frac{y^2}{-c/b} = 1$. Так как $-c/a, -c/b$ — числа разных знаков, геометрический образ — гипербола.

Окончание доказательства теоремы

Рассмотрим уравнение $ax^2 + by = 0$, где $a, b \neq 0$. Оно равносильно уравнению $y = -\frac{a}{b}x^2$. Геометрический образ — парабола. Аналогично уравнение $ax + by^2 = 0$, где $a, b \neq 0$, равносильно уравнению $y^2 = -\frac{a}{b}x$, и определяет параболу.

Рассмотрим уравнение $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. В зависимости от значения c рассмотрим следующие возможности.

III.1. $c > 0$. В этом случае геометрический образ — пустое множество, так как $ax^2 + c \geq c$.

III.2. $c = 0$. В этом случае геометрический образ — прямая, так как уравнение $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x = 0$.

III.3. $c < 0$. В этом случае уравнение $ax^2 + c = 0$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$, которое в свою очередь равносильно совокупности уравнений $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Геометрический образ — пара параллельных прямых.

Аналогично рассматриваются возможные геометрические образы уравнения $by^2 + c = 0$, $b \neq 0$. $\Uparrow$

Пример

Определить вид квадрики $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$, найти каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики (относительно исходной системы координат).

Находим $\operatorname{ctg} 2\varphi$ по формуле (2), получаем $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Положим $t = \operatorname{tg}\varphi$, тогда $\frac{1-t^2}{2t} = \frac{4}{3}$, откуда $3t^2 + 8t - 3 = 0$ и $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = -3$. Полагаем $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$. Находим $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{10}{9}$, откуда $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Записываем формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 - y_1), \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x_1 + 3y_1). \end{cases} \tag{3}$$

Вычисляем

$$7x^2 + 6xy - y^2 = \frac{7}{10}(3x_1 - y_1)^2 + \frac{6}{10}(3x_1 - y_1)(x_1 + 3y_1) - \frac{1}{10}(x_1 + 3y_1)^2 =$$

$$\frac{7}{10}(9x_1^2 - 6x_1y_1 + y_1^2) + \frac{6}{10}(3x_1^2 - 3y_1^2 + 8x_1y_1) - \frac{1}{10}(x_1^2 + 6x_1y_1 + 9y_1^2) = 8x_1^2 - 2y_1^2.$$

Уравнение квадрики после поворота системы координат принимает вид $8x_1^2 - 2y_1^2 + \frac{96}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{10}}y_1 + 28 = 0$. После выделения полных квадратов получаем $8(x_1 + \frac{6}{\sqrt{10}})^2 - 2(y_1 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 0$. Положим

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \dfrac{6}{\sqrt{10}}, \\ y_2 = y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{10}}. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда, сократив на 2, получаем $4x_2^2 - y_2^2 = 0$. Это каноническое уравнение квадрики, которая является парой пересекающихся прямых $y_2 = \pm 2x_2$. Система координат Ox_1y_1 получается из исходной системы координат Oxy поворотом против часовой стрелки на угол $\operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$. Система координат $O_1x_2y_2$ получается из системы координат Ox_1y_1 параллельным переносом: новое начало координат помещается в точку O_1 с координатами $x_1 = -\frac{6}{\sqrt{10}}$, $y_1 = \frac{2}{\sqrt{10}}$. В системе координат Oxy координаты точки O_1 удобно вычислить по формулам (3) через ее координаты в системе Ox_1y_1: $x = 2$, $y = 0$.

Для удобства построения графика найдем уравнения прямых $y_2 = \pm 2x_2$ в системе координат Oxy. Для этого нужно выразить x_2, y_2 через x, y. Учитывая (4), выразим x_1, y_1 через x, y. Для этого решим систему уравнений (3) по формулам Крамера относительно x_1, y_1:
$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ y & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{vmatrix} = \frac{3x+y}{\sqrt{10}}$,
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & x \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & y \end{vmatrix} = \frac{-x+3y}{\sqrt{10}}$. Таким образом, $x_1 = \dfrac{3x+y}{\sqrt{10}}$, $y_1 = \dfrac{-x+3y}{\sqrt{10}}$ и из (4) $x_2 = \dfrac{3x+y+6}{\sqrt{10}}$, $y_2 = \dfrac{-x+3y-2}{\sqrt{10}}$. Следовательно, в системе координат Oxy прямая $y_2 = 2x_2$ имеет уравнение $7x - y + 14 = 0$, а прямая $y_2 = -2x_2$ — уравнение $x + y + 2 = 0$.

Полученные уравнения показывают, что выражение в левой части исходного уравнения квадрики раскладывается в произведение:
$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = (7x - y + 14)(x + y + 2)$.
Способ решения этого примера позволяет раскладывать на множители многочлен второй степени от двух неизвестных в случае, когда это возможно.
Чертеж см. на рис. 1 на следующем слайде.

Чертеж к примеру

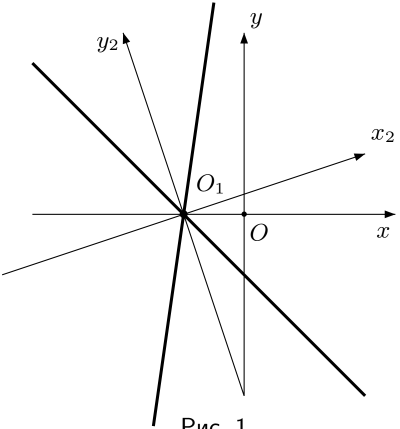

Рис. 1

Предложение

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy квадрика задана уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, а после параллельного переноса или поворота этой системы координат вокруг точки O на угол φ в полученной системе координат Ox_1y_1 та же квадрика задается уравнением $a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1y_1 + a'_{22}y_1^2 + 2a'_1x_1 + 2a'_2y_1 + a'_0 = 0$. Тогда

$a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22}$ и $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}$.

$\Downarrow$При параллельном переносе $x = x_1 + c_1$, $y = y_1 + c_1$ и ясно, что $a_{11} = a'_{11}$, $a_{22} = a'_{22}$, $a_{12} = a'_{12}$.

При повороте на угол φ из формул слайда 3 , так как $a = a'_{11}$, $b = a'_{22}$, $d = 2a'_{12}$, получаем $a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$, $a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$, $a'_{12} = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}((a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi) = (a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}\cos 2\varphi$.

Ясно, что $a'_{11} + a'_{22} = a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi = a_{11} + a_{22}$.

Вычислим $a'_{11}a'_{22} = (a_{11}\cos^2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)(a_{11}\sin^2\varphi - a_{12}\sin 2\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) = a_{11}^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 2a_{11}a_{12}\sin^3\varphi\cos\varphi + a_{11}a_{22}\sin^4\varphi - 2a_{11}a_{12}\cos^3\varphi\sin\varphi - a_{12}^2\sin^2 2\varphi - 2a_{12}a_{22}\sin^3\varphi\cos\varphi + a_{11}a_{22}\cos^4\varphi + 2a_{12}a_{22}\sin\varphi\cos^3\varphi + a_{22}^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = a_{11}a_{22}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - a_{12}^2\sin^2 2\varphi + (a_{11}^2 + a_{22}^2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 2a_{12}(a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi$;

$((a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}\cos 2\varphi)^2 = (a_{22} - a_{11})^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2a_{12}(a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi + a_{12}^2\cos^2 2\varphi$;

$a'_{11}a'_{22} - (a'_{12})^2 = a_{11}a_{22}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - a_{12}^2\sin^2 2\varphi + (a_{11}^2 + a_{22}^2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 2a_{12}(a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi - (a_{22} - a_{11})^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 2a_{12}(a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi - a_{12}^2\cos^2 2\varphi = a_{11}a_{22}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) + (a_{11}^2 + a_{22}^2 - (a_{22} - a_{11})^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi - a_{12}^2(\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi) = a_{11}a_{22}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi + 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi) - a_{12}^2 = a_{11}a_{22}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 - a_{12}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.\Uparrow$

Определение

Выражения $S = a_{11} + a_{22}$ и $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ называются *инвариантами общего уравнения квадрики* относительно преобразования прямоугольной декартовой системы координат.

При подходящем изменении прямоугольной декартовой системы координат квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ из общего уравнения квадрики

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{5}$$

приводится к виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Поэтому $S = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$, $\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, т.е. $\lambda_1 + \lambda_2 = S$, $\lambda_1\lambda_2 = \delta$. В силу теоремы Виета λ_1, λ_2 являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$.

Определение

Уравнение $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ называется *характеристическим уравнением* квадрики, заданной общим уравнением (5).

Отметим без доказательства, что выражение $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ является инвариантом общего уравнения квадрики (5) относительно преобразования прямоугольной декартовой системы координат..

Предложение

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ для уравнения квадрики (5) и $a_{12} \neq 0$. Для того, чтобы после поворота системы координат на угол φ вокруг начала координат квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ превратилась в $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ (а не в $\lambda_1 y'^2 + \lambda_2 x'^2$), необходимо взять угол φ так, чтобы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$.

$\Downarrow$Запишем формулы $a'_{11} = \lambda_1 = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$, $a'_{12} = 0 = (a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Умножим первое из этих равенств на $\cos\varphi$, второе на $-\sin\varphi$ и сложим:
$\lambda_1\cos\varphi = a_{11}(\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi) + a_{22}(\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi) + a_{12}(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\varphi) = a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi$, т.е.
$\lambda_1\cos\varphi = a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi$, откуда получаем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$,
поскольку при $a_{12} \neq 0$ и $\cos\varphi \neq 0$.$\Uparrow$

Рассмотрим квадрику, заданную общим уравнением (5), у которого инвариант $\delta \neq 0$. Тогда после исключения произведения переменных квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ превратится в $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, так как $\lambda_1 \lambda_2 = \delta$. Следовательно, данная квадрика имеет центр симметрии $C(x_0, y_0)$. Перенеся начало координат в точку C ($x = X + x_0$, $y = Y + y_0$), мы получим уравнение, не содержащее первых степеней X, Y. Уравнение (5) превратится в $a_{11}(X + x_0)^2 + 2a_{12}(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}(Y + y_0)^2 + 2a_1(X + x_0) + 2a_2(Y + y_0) + a_0 = 0$ или в $a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2X(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + 2Y(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) + a_0' = 0$, где $a_0' = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0$.

Значит, $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases}$ и для определения координат точки C получается крамеровская система линейных уравнений

$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_1, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = -a_2, \end{cases}$ у которой главный определитель

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta \neq 0.$

Итак, в случае, когда $\delta \neq 0$, координаты центра симметрии квадрики в исходной системе координат можно найти указанным образом. Затем, если $a_{12} \neq 0$, то можно повернуть систему координат на угол φ с $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$. Получится каноническая система координат.

С помощью инвариантов определить вид квадрики, найти каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ (относительно исходной системы координат).

$a_{11} = 5$, $a_{22} = 10$, $a_{12} = 6$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $a_0 = -1$.

$S = a_{11} + a_{22} = 15$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 36 = 14$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 0 & 14 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$14 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-14) = -196.$$

Центр симметрии $C(x_0, y_0)$, $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_1, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = -a_2, \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x_0 + 6y_0 = 3, \\ 6x_0 + 10y_0 = -2, \end{cases} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 42, \ \triangle_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -28,$$

$x_0 = \dfrac{\triangle_1}{\delta} = 3$, $y_0 = \dfrac{\triangle_2}{\delta} = -2$. $C(3, -2)$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$, $\lambda^2 - 15\lambda + 14 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 14$. Сделаем параллельный перенос: $x_1 = x - 3$, $y_1 = y + 2$.

$5x_1^2 + 12x_1y_1 + 10y_1^2 + a^* = 0$, $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & a^* \end{vmatrix} = 14a^*$, $14a^* = -196$,

$a^* = -14$, $5x_1^2 + 12x_1y_1 + 10y_1^2 - 14 = 0$.

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{1-5}{6} = -\dfrac{2}{3}$, $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{1}{1+\frac{4}{9}} = \dfrac{9}{13}$,

$\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Поворот системы координат: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3X + 2Y), \\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2X + 3Y), \end{cases}$

$X^2 + 14Y^2 - 14 = 0$, $\dfrac{X^2}{14} + Y^2 = 1$, эллипс.

Точки пересечения с осью Ox: $y = 0$, $5x^2 - 6x - 1 = 0$,

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+5}}{5} = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{5}$, $x_1 \approx 1.35$, $x_2 \approx -0.15$.

Точки пересечения с осью Oy: $x = 0$, $10y^2 + 4x - 1 = 0$,

$y_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+10}}{10} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{14}}{10}$, $y_1 \approx 0.17$, $y_2 \approx -0.57$.