

Тема 7: Прямая в пространстве

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Векторное уравнение прямой в пространстве

Этот слайд фактически повторяет слайд 4 т.5.

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть ℓ — прямая в пространстве, проходящая через точку M_0 . Возьмем на этой прямой некоторый базис \vec{a} .

Определение

Точка M_0 называется *начальной точкой* прямой ℓ , а вектор \vec{a} — ее *направляющим вектором*.

Из геометрических соображений легко понять, что произвольная точка плоскости M будет лежать на прямой ℓ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{a} коллинеарны. Согласно предложению и следствию сл.15 т.2, так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{a} коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Напомним, что $\vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = \overrightarrow{M_0M}$. Таким образом, $M \in \ell \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = t\vec{a}$ и мы приходим к *векторному уравнению прямой в пространстве*.

Векторное уравнение прямой в пространстве

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Обозначим координаты точки M через (x, y, z) , точки M_0 через (x_0, y_0, z_0) и пусть $[\vec{a}] = (p, q, r)$. Тогда из (1) получаются

Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Пусть ℓ — прямая в пространстве, проходящая через точку M_0 с известными координатами (x_0, y_0, z_0) , и имеющая направляющий вектор \vec{a} , $[\vec{a}] = (p, q, r)$, $p^2 + q^2 + r^2 > 0$, поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть $M(x, y, z)$ — точка пространства. Так как $M \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$, используя критерий коллинеарности векторов по координатам (см. сл.22 т.2), получаем

Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\ell: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (3)$$

Для записи и параметрических, и канонических уравнений прямой в пространстве используется одна и та же информация о прямой: координаты начальной точки и координаты направляющего вектора. Поэтому переход от канонических уравнений к параметрическим и обратно не представляет никаких трудностей.

С помощью канонических уравнений можно записать уравнения прямой ℓ , проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$:

$$\ell: \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (4)$$

В самом деле, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ является направляющим для прямой ℓ .

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей. Если $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$ и $\pi_1 : Ax_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,
 $\pi_2 : Ax_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то приходим к следующему определению.

Определение

Система уравнений

$$\ell : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

называется *общими уравнениями прямой в пространстве*.

При этом главные векторы плоскостей π_1 и π_2 должны быть неколлинеарны.

Легко понять, что из канонических уравнений прямой в пространстве (3) получаются некоторые общие уравнения этой прямой. При решении задач чаще всего наиболее удобно использовать параметрические уравнения прямой в пространстве.

На следующем слайде показано, как перейти от общих уравнений прямой в пространстве к ее параметрическим уравнениям.

Теорема

Для прямой ℓ , заданной общими уравнениями (5), вектор \vec{a} с координатами $\left(\left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \right)$ является направляющим.

↓ Так как главные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны, по крайней мере один из определителей-координат вектора \vec{a} отличен от нуля. Предположим для определенности, что

$\left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \neq 0$. Перепишем систему (5) в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \end{cases}$$
 Это крамеровская система уравнений с

ненулевым главным определителем. Ее единственное решение

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} -C_1z - D_1 & B_1 \\ -C_2z - D_2 & B_2 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|} =$$

$$\left(z \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{array} \right| \right) / \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|,$$

$$y = \left| \begin{array}{cc} A_1 & -C_1z - D_1 \\ A_2 & -C_2z - D_2 \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| =$$

$$\left(-z \left| \begin{array}{cc} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{array} \right| \right) / \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|. \text{ При } z_0 = 0 \text{ получаем}$$

$$x_0 = - \left| \begin{array}{cc} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \text{ и } y_0 = - \left| \begin{array}{cc} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{array} \right| / \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right|. \text{ При}$$

$$z_1 = \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \text{ имеем } x_1 = \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| + x_0, y_1 = - \left| \begin{array}{cc} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{array} \right| + y_0. \text{ На}$$

прямой ℓ получили различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Следовательно, вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является направляющим вектором этой прямой. \uparrow

В качестве начальной точки на прямой ℓ , заданной общими уравнениями (5), можно взять любую точку, координаты которой являются частным решением системы линейных уравнений (5).

Таким образом можно перейти от задания прямой общими уравнениями к параметрическому или каноническому уравнениям.

Пусть в произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы общее уравнение плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и параметрические

уравнения прямой $\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$ Справедлива следующая

Теорема

- 1 Прямая ℓ и плоскость π пересекаются тогда и только тогда, когда $Ap + Bq + Cr \neq 0$.
- 2 $\ell \parallel \pi \iff Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.
- 3 $\ell \subset \pi \iff Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

↓ Взаимное расположение прямой и плоскости определяется множеством их общих точек. Чтобы найти координаты этих точек, решаем систему из общего уравнения плоскости и параметрических уравнений прямой. Имеем $A(x_0 + pt) + B(y_0 + qt) + C(z_0 + rt) + D = 0$, откуда $(Ap + Bq + Cr)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. При $Ap + Bq + Cr \neq 0$ система имеет единственное решение (общая точка единственная), при $Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ она не имеет решений (общих точек нет) и при $Ap + Bq + Cr = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ имеет бесконечное множество решений (все точки прямой принадлежат плоскости). ↑

Из теоремы сл.9 непосредственно получается следующее утверждение.

Следствие

Пусть в произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы общее уравнение плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и координаты вектора $\vec{a} = (p, q, r)$. Тогда $\vec{a} \parallel \pi \iff Ap + Bq + Cr = 0$.

↓В самом деле, $\vec{a} \parallel \pi$ тогда и только тогда, когда любая прямая с направляющим вектором \vec{a} лежит в плоскости π или параллельна ей. Остается применить теорему сл.9.↑

При решении задач часто приходится находить координаты точки пересечения прямой и плоскости. Они находятся так, как это указано в доказательстве теоремы сл.9. Выводить и запоминать громоздкие формулы для выражения этих координат через коэффициенты уравнений прямой и плоскости не требуется.

Пусть в произвольной декартовой системе координат $Oxuz$ заданы параметрические уравнения двух прямых

$$l_1 : \begin{cases} x = x_1 + p_1 t, \\ y = y_1 + q_1 t, \\ z = z_1 + r_1 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \text{и} \quad l_2 : \begin{cases} x = x_2 + p_2 t, \\ y = y_2 + q_2 t, \\ z = z_2 + r_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Обозначим через $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $\vec{a}_i = (p_i, q_i, r_i)$ ($i = 1, 2$) начальные точки и направляющие векторы этих прямых соответственно. Имеет место следующая

Теорема

- 1 Прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0 M_1}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 некопланарны.
- 2 Прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0 M_1}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 компланарны и $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$.
- 3 $l_1 \parallel l_2 \iff \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_0 M_1}$.
- 4 $l_1 = l_2 \iff \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_0 M_1}$.

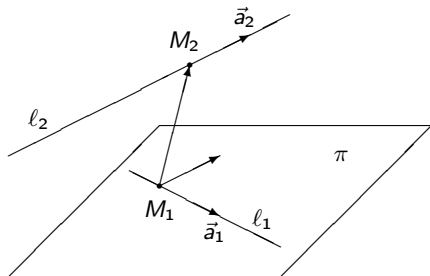


Рис. 1

↓ Докажем утверждение 1. Отложим от точки M_1 векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 (см. рис.1). Рассмотрим плоскость π , проходящую через l_1 компланарно вектору \vec{a}_2 . Если прямые l_1 и l_2 скрещиваются, то прямая l_2 не лежит в плоскости π , и векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 некопланарны. Обратно, если эти векторы некопланарны, то прямые l_1 и l_2 не лежат в одной плоскости и потому скрещиваются.

Утверждение 2 является непосредственным следствием утверждения 1, так как две прямые в пространстве пересекаются тогда и только тогда, когда они не скрещиваются и их направляющие векторы неколлинеарны. Утверждения 3 и 4 очевидны. ↑

Используя критерии компланарности (сл.14 т.4) и коллинеарности (сл.22 т.2) векторов через координаты, легко сформулировать необходимые и достаточные условия для каждого случая взаимного расположения двух прямых в терминах координат начальных точек и направляющих векторов.

Если требуется доказать, что прямые l_1 и l_2 , заданные параметрическими уравнениями (см. сл.11), пересекаются, и найти координаты точки пересечения, то удобно использовать следующий подход. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — общая точка прямых l_1 и l_2 . Тогда ее координаты получаются из параметрических уравнений каждой прямой при своем

значении параметра: $\begin{cases} x_0 = x_1 + p_1 t_1, \\ y_0 = y_1 + q_1 t_1, \\ z_0 = z_1 + r_1 t_1. \end{cases}$ и $\begin{cases} x_0 = x_2 + p_2 t_2, \\ y_0 = y_2 + q_2 t_2, \\ z_0 = z_2 + r_2 t_2. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} x_1 + p_1 t_1 = x_2 + p_2 t_2, \\ y_1 + q_1 t_1 = y_2 + q_2 t_2, \\ z_1 + r_1 t_1 = z_2 + r_2 t_2. \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений имеет единственное решение в том и только в том случае, когда прямые l_1 и l_2 пересекаются, и это решение позволяет легко найти координаты (x_0, y_0, z_0) общей точки M_0 этих прямых.

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxuz$ заданы параметрические уравнения двух скрещивающихся прямых

$$l_1 : \begin{cases} x = x_1 + p_1 t, \\ y = y_1 + q_1 t, \\ z = z_1 + r_1 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \text{и} \quad l_2 : \begin{cases} x = x_2 + p_2 t, \\ y = y_2 + q_2 t, \\ z = z_2 + r_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Обозначим через $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $\vec{a}_i = (p_i, q_i, r_i)$ ($i = 1, 2$) начальные точки и направляющие векторы этих прямых соответственно. Тогда имеет место

Предложение

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равно

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_0 M_1} \vec{a}_1 \vec{a}_2|}{\|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]\|}.$$

↓ Легко понять (см. рис.1 на сл.12), что искомое расстояние равно расстоянию от любой точки на прямой l_2 до плоскости π , проходящей через прямую l_1 параллельно прямой l_2 . В частности, расстояние от точки M_2 до плоскости π есть длина высоты параллелепипеда, построенного на изображениях векторов $\overrightarrow{M_0 M_1}$, \vec{a}_1 , \vec{a}_2 , отложенных от точки M_1 . Она равна отношению объема параллелепипеда к площади его основания на плоскости π , т.е. параллелограмма, построенного на изображениях векторов \vec{a}_1 , \vec{a}_2 , отложенных от точки M_1 .

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxuz$ заданы общее уравнение плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и параметрические

$$\text{уравнения прямой } \ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Определение

Если прямая параллельна плоскости или лежит в плоскости, то **угол** между ними по определению равен нулю. Если прямая пересекает плоскость, то **угол** между ними по определению равен острому углу между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Обозначим через \vec{n} и \vec{a} нормальный вектор плоскости π и направляющий вектор прямой ℓ соответственно.

Предложение

Пусть прямая ℓ и плоскость π пересекаются. Тогда

$$\sin(\widehat{\ell, \pi}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| |\vec{a}|} = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

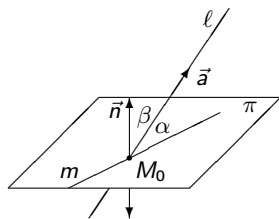


Рис. 2

↓ Пусть прямая ℓ пересекает плоскость π в точке M_0 (см. рис.2). Обозначим через t проекцию прямой ℓ на плоскость π , через α угол между прямыми ℓ и t и через β острый угол между перпендикуляром к плоскости и прямой ℓ . Тогда $\sin \alpha = \cos \beta$. Угол β равен либо $\widehat{(\vec{n}, \vec{a})}$ (как на рис.2), либо дополняет этот угол до 180° . Во всех случаях $\sin \alpha = |\cos \widehat{(\vec{n}, \vec{a})}|$. Остается применить формулу (3) сл.6 т.3, выражающую косинус угла между векторами через их скалярное произведение и длины.↑

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ заданы координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и параметрические уравнения прямой

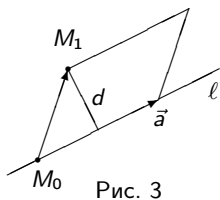
$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 с начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и

направляющим вектором $\vec{a} = (p, q, r)$.

Предложение

Расстояние от точки M_1 до прямой ℓ равно

$$d(M_1, \ell) = \frac{|\overrightarrow{[M_0M_1, \vec{a}]}|}{|\vec{a}|}.$$



↓ Опустим перпендикуляр из точки M_1 на прямую ℓ и построим параллелограмм на изображениях векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$, \vec{a} , отложенных от начальной точки M_0 прямой ℓ (см. рис.3). Искомое расстояние d — длина высоты этого параллелограмма, которая равна отношению площади параллелограмма к длине основания. Остается найти площадь параллелограмма с помощью векторного произведения (сл.16 т.4). ↑

Задача

Найти параметрические уравнения прямой, коллинеарной вектору $\vec{a} = (1, -3, 2)$ и пересекающей две данные прямые

$l_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{2}$ и $l_2: \frac{x-4}{-1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-2}{1}$. Система координат произвольная декартова.

Решение. Искомая прямая l имеет общие точки с прямыми l_1 и l_2 и коллинеарна вектору \vec{a} . Следовательно, она лежит в плоскости π , проходящей через прямую l_1 компланарно вектору \vec{a} . Точка $l \cap \pi$ совпадает с точкой $l_2 \cap \pi$.

Находим уравнение плоскости π :
$$\begin{vmatrix} x-4 & y+2 & z-1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или}$$

$-2(x-4) - 4(y+2) - 5(z-1) = 0$, $2x + 4y + 5z - 5 = 0$. Находим $l_2 \cap \pi$.

Параметрические уравнения прямой $l_2: x = 4 - t, y = -6 + 2t, z = 2 + t$ подставляем в уравнении плоскости: $2(4-t) + 4(-6+2t) + 5(2+t) - 5 = 0$ или $11t - 11 = 0, t = 1$. Получаем точку $M(3, -4, 3)$ на прямой l .

Параметрические уравнения прямой $l: x = 3 + t, y = -4 - 3t, z = 3 + 2t$.

Ответ: $x = 3 + t, y = -4 - 3t, z = 3 + 2t$.

Задача

Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(4, -3, -1)$ относительно прямой $l: \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+6}{5}$. Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Рассмотрим плоскость π , проходящую через точку P перпендикулярно к прямой l . Она пересекает прямую l в точке R , называемой проекцией точки P на прямую l . Точка R делит отрезок $[P, Q]$ пополам.

Для плоскости π направляющий вектор $\vec{a} = (3, 4, 5)$ прямой l является нормальным. Записываем уравнение плоскости π (см уравнение (9) сл.13 т.6): $3(x-4) + 4(y+3) + 5(z+1) = 0$ или $\pi: 3x + 4y + 5z + 5 = 0$.

Находим точку $R = l \cap \pi$. Для этого подставляем параметрические уравнения прямой l $x = 3 + 3t$, $y = 4 + 4t$, $z = -6 + 5t$ в уравнение плоскости: $3(3 + 3t) + 4(4 + 4t) + 5(-6 + 5t) + 5 = 0$ или $50t = 0$, $t = 0$.

Точка $R(3, 4, -6)$. Точка $Q(x_0, y_0, z_0)$. Так как точка R делит отрезок $[P, Q]$ пополам, имеем $\frac{x_0 + 4}{2} = 3$, $\frac{y_0 - 3}{2} = 4$, $\frac{z_0 - 1}{2} = -6$. Таким образом, $x_0 = 2$, $y_0 = 11$, $z_0 = -11$.

Ответ: $Q(2, 11, -11)$.