

# Тема 6: Плоскости

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Аналитическая геометрия для физиков

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат  $Oxyz$ .

## Определения

**Геометрическим образом** уравнения  $F(x, y, z) = 0$  относительно системы координат  $Oxyz$  называется множество  $\pi$  всех точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению  $F(x, y, z) = 0$ .

При этом говорят, что уравнение  $F(x, y, z) = 0$  **задает** множество точек  $\pi$ . Указанное уравнение называется **координатным уравнением** множества точек  $\pi$ .

Обозначение:  $\pi : F(x, y, z) = 0$ .

Точное определение поверхности использует понятия, выходящие за пределы курса аналитической геометрии, и дается в курсе математического анализа.

Например, геометрическим образом уравнения

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

относительно прямоугольной декартовой системы координат в пространстве является сфера с центром в точке  $C(x_0, y_0, z_0)$  и радиусом  $r$ .

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Пусть  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  и  $h(u, v)$  — некоторые функции, определенные на некотором подмножестве  $U$  множества  $\mathbb{R}^2$  (чаще всего это прямоугольник, полоса или все множество  $\mathbb{R}^2$ ).

## Определение

Говорят, что уравнения  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$ ,  $z = h(u, v)$ , где  $(u, v) \in U$ , **определяют** множество  $\pi$  всех точек в пространстве, координаты которых относительно системы координат  $Oxyz$  есть  $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ , когда  $(u, v) \in U$ . Эти уравнения называются **параметрическими уравнениями** множества точек  $\pi$ .

Например, уравнения

$$x = x_0 + r \cos u \cos v, \quad y = y_0 + r \cos u \sin v, \quad z = z_0 + r \sin u,$$

где  $-\frac{\pi}{2} < u \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < v \leq 2\pi$ , относительно прямоугольной декартовой системы координат в пространстве определяют сферу с центром в точке  $C(x_0, y_0, z_0)$  и радиусом  $r$ .

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Пусть  $\pi$  — плоскость, проходящая через точку  $M_0$ . Возьмем на этой плоскости некоторый базис  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

### Определение

Точка  $M_0$  называется *начальной точкой* плоскости  $\pi$ , а векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  — ее *направляющими векторами*.

Из геометрических соображений легко понять, что произвольная точка пространства  $M$  будет лежать на плоскости  $\pi$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  компланарны. Согласно следствию сл.18 т.2, так как  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ , векторы  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  компланарны тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$  для некоторых  $u, v \in \mathbb{R}$ . Напомним, что  $\vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = \overrightarrow{M_0M}$ . Таким образом,  $M \in \pi \Leftrightarrow M - M_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$  и мы приходим к векторному уравнению плоскости.

### Векторное уравнение прямой плоскости

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + u\vec{a} + v\vec{b}, \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Обозначим координаты точки  $M$  через  $(x, y, z)$ , точки  $M_0$  через  $(x_0, y_0, z_0)$  и пусть  $[\vec{a}] = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $[\vec{b}] = (b_1, b_2, b_3)$ . Тогда из (??) получаются

### Параметрические уравнения плоскости

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases} \quad (u, v \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Параметрические уравнения плоскости устанавливают связь между координатами  $(x, y, z)$  произвольной точки  $M$  на плоскости в пространственной системе координат  $Oxyz$  и ее координатами  $(u, v)$  в системе координат  $(M_0; \vec{a}, \vec{b})$  на плоскости  $\pi$  (см. рис. 1 на следующем слайде).

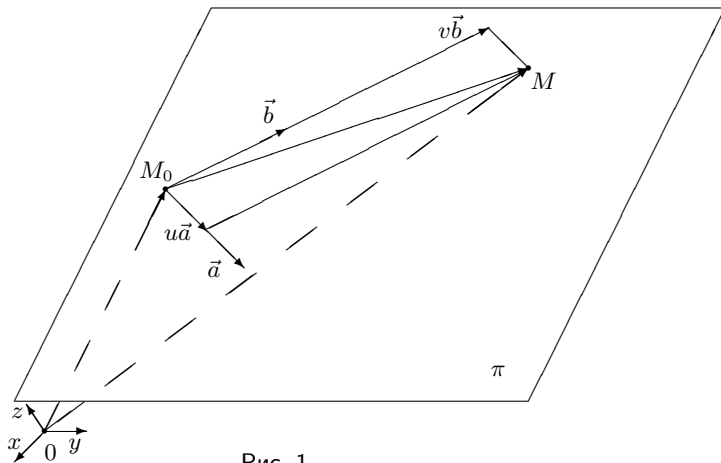


Рис. 1

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Пусть  $\pi$  — плоскость, проходящая через точку  $M_0$ . Возьмем на этой плоскости некоторый базис  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Обозначим координаты точки  $M_0$  через  $(x_0, y_0, z_0)$  и пусть  $[\vec{a}] = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $[\vec{b}] = (b_1, b_2, b_3)$ . Произвольная точка  $M(x, y, z)$  пространства принадлежит плоскости  $\pi$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  компланарны. С помощью критерия компланарности векторов в координатах (сл.14 т.4) получаем

### Каноническое уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

При раскрытии определителя по первой строке получается координатное уравнение плоскости.

Пусть три точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  не лежат на одной прямой. Тогда они определяют единственную плоскость  $\pi$ , у которой точка  $M_0$  является начальной, а векторы  $\overrightarrow{M_0M_1}$  и  $\overrightarrow{M_0M_2}$  — направляющими. С помощью уравнения плоскости (??), получаем

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Пусть даны две точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и вектор  $\vec{a}$  с координатами  $(a_1, a_2, a_3)$  так, что векторы  $\overrightarrow{M_0M_1}$  и  $\vec{a}$  неколлинеарны. Тогда существует единственная плоскость  $\pi$  такая, что  $M_0, M_1 \in \pi$  и  $\vec{a} \parallel \pi$ . Применяя уравнение плоскости (??), получаем

Уравнение плоскости, проходящей через две точки компланарно вектору

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$



## Определение

Уравнение вида  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C, D$  — фиксированные числа и  $A, B, C$  одновременно не обращаются в нуль, называется *алгебраическим уравнением первой степени с тремя неизвестными*.

## Теорема

В произвольной декартовой системе координат в пространстве плоскости и только они являются геометрическими образами алгебраических уравнений первой степени с тремя неизвестными.

↓ Пусть  $\pi$  — произвольная плоскость. Распишем в ее каноническом уравнении (??) определитель по первой строке:

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Положим  $A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ ,  $B = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$ ,  $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ . Так как

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ , числа  $A, B, C$  одновременно не обращаются в нуль. Получаем уравнение  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ . Раскрывая скобки и полагая  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ , получаем требуемое:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пусть теперь  $Ax + By + Cz + D = 0$  — произвольное алгебраическое уравнение первой степени с тремя неизвестными и  $\alpha$  — его геометрический образ. Предположим для определенности, что  $A \neq 0$ . Тогда точка  $M_0$  с координатами  $x_0 = -D/A$  и  $y_0 = 0, z_0 = 0$  принадлежит  $\alpha$ , так как

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (6)$$

Возьмем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с координатами  $(-B, A, 0)$  и  $(-C, 0, A)$  соответственно. Ясно, что  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ . Пусть  $\pi$  — плоскость, проходящая через точку  $M_0$  с направляющими векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Тогда согласно уравнению

$$(\text{??}) \pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0. \text{ Расписав определитель по первой}$$

строке, получим  $A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0$ . Сократив на  $A$ , раскрыв скобки и воспользовавшись (??), получим

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ . Следовательно,  $\pi = \alpha$ .  $\uparrow$

### Определение

Уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C$  одновременно не обращаются в нуль, называется *общим уравнением плоскости*.

Общее уравнение является координатным уравнением плоскости.

Из доказательства теоремы получается

### Следствие

Если плоскость  $\pi$  задана общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$  и  $A \neq 0$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с координатами  $(-B, A, 0)$  и  $(-C, 0, A)$  соответственно являются направляющими для этой плоскости.

Определите направляющие векторы плоскости в случаях  $B \neq 0$  и  $C \neq 0$ .

Если в общем уравнении  $Ax + By + Cz + D = 0$  плоскости  $\pi$  все коэффициенты отличны от нуля, то оно равносильно уравнению  $\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$ . Полагая  $a = -D/A$ ,  $b = -D/B$ ,  $c = -D/C$ , получаем

### Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (7)$$

Плоскость  $\pi$  пересекает оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно в точках с координатами  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  и  $(0, 0, c)$ .

Зафиксируем в пространстве прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Пусть плоскость  $\pi$  задана общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Тогда вектор  $\vec{n}$  с координатами  $(A, B, C)$  перпендикулярен к неколлинеарным направляющим векторам  $\vec{a}$  с координатами  $(-B, A, 0)$  и  $\vec{b}$  с координатами  $(-C, 0, A)$ , так как скалярные произведения  $\vec{n}\vec{a} = A(-B) + BA = 0$  и  $\vec{n}\vec{b} = A(-C) + CA = 0$ . Поэтому вектор  $\vec{n}$  перпендикулярен к плоскости  $\pi$ .

### Определение

Вектор  $\vec{n}$  с координатами  $(A, B, C)$  называется **нормальным вектором** плоскости  $\pi$ , заданной общим уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

По нормальному вектору и начальной точке уравнение плоскости однозначно восстанавливается.

## Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

В самом деле, точка пространства  $M(x, y, z)$  принадлежит плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно к вектору  $\vec{n}$  с координатами  $(A, B, C)$  тогда и только тогда, когда

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0. \quad (8)$$

Это векторное уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Расписывая в нем скалярное произведение через координаты векторов, получаем

### Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

Плоскость, перпендикулярная ненулевому вектору  $\vec{n}$  с координатами  $(A, B, C)$ , проходящая через точку  $M_0$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , задается уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (9)$$

## Определение

В случае произвольной декартовой системы координат для плоскости  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  вектор  $\vec{n}$  с координатами  $(A, B, C)$  называется **главным вектором** этой плоскости.

Зафиксируем в пространстве произвольную декартову систему координат  $Oxyz$ . Пусть  $\pi_1 : Ax_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $\pi_2 : Ax_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  — две плоскости. По коэффициентам уравнений выясним, как располагаются эти плоскости. Обозначим через  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  главные векторы этих плоскостей.

## Теорема

Справедливы следующие утверждения.

- 1 Плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  пересекаются тогда и только тогда, когда  $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ .
- 2  $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ .
- 3  $\pi_1 = \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ .

$\Downarrow$  Предположим, что  $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$  и покажем, что плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  пересекаются. Предположим для определенности, что  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ . Положим  $z_0 = 0$  и найдем  $x_0, y_0$  из системы уравнений  $\begin{cases} Ax_1 + B_1y = -D_1, \\ Ax_2 + B_2y = -D_2. \end{cases}$  Это крамеровская система с ненулевым главным определителем. Она имеет единственное решение  $(x_0, y_0)$ . Таким образом, точка  $M_0(x_0, y_0, 0)$  принадлежит  $\pi_1 \cap \pi_2$ . Следовательно,  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ . Рассмотрим плоскость  $\gamma : z = 0$ . Из доказанного следует, что  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \gamma = \{M_0\}$ . Поэтому плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  не могут совпадать: иначе  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \gamma = \pi_2 \cap \gamma \neq \{M_0\}$ . Следовательно, плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  пересекаются.

Предположим, что  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ . Тогда система уравнений

$$\begin{cases} Ax_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ Ax_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \text{ несовместна и потому } \pi_1 \parallel \pi_2.$$

Предположим, что  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ . Тогда уравнения  $Ax_1 + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $Ax_2 + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  отличаются ненулевым множителем и потому равносильны. Следовательно,  $\pi_1 = \pi_2$ . Из доказанных утверждений вытекают и обратные импликации в утверждениях 1,2,3 теоремы сл.14.  $\Uparrow$

## Определение

*Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости или совпадающих с ней.

Ясно, что несобственный пучок определяется любой своей плоскостью. Легко понять, что любая плоскость из несобственного пучка, определяемого плоскостью  $\ell : Ax + By + Cz + D = 0$ , имеет следующее уравнение.

## Уравнение несобственного пучка

$$Ax + By + Cz + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$



## Определение

*Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую.

Ясно, что собственный пучок определяется любой парой своих различных плоскостей.

## Теорема

Пусть  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  — пересекающиеся плоскости. Произвольная плоскость принадлежит собственному пучку плоскостей, определяемому плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$  тогда и только тогда, когда ее уравнение может быть представлено в виде

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (10)$$
$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda^2 + \mu^2 > 0.$$

Это *уравнение собственного пучка плоскостей*.

↓ Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы сл.17 т.5 об уравнении собственного пучка прямых на плоскости (см. сл.18,19 т.5).↑

## Определение

Если две плоскости параллельны или совпадают, то угол между ними по определению равен нулю.

Пересекающиеся плоскости образуют между собой четыре угла. Так как углы с взаимно перпендикулярными сторонами равны и нормальный вектор плоскости перпендикулярен к любой прямой, лежащей в этой плоскости, линейный угол двугранного угла равен углу между подходящими нормальными векторами. Если плоскости заданы общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , то их нормальные векторы  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  образуют угол  $\varphi$ , для которого  $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ . Вычислив скалярное произведение и длины векторов в прямоугольной декартовой системе координат, получаем формулу для косинуса угла между плоскостями.

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (11)$$

Если плоскости заданы общими уравнениями  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  в прямоугольной декартовой системе координат, то они перпендикулярны в том и только том случае, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Материал этого пункта аналогичен материалу сл.23 т.5.

Зафиксируем аффинную декартову систему координат в пространстве и плоскость  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ . Плоскость  $\pi$  разбивает пространство на части, называемыми *полупространствами*. Главный вектор  $\vec{n}$  плоскости  $\pi$  (см. сл.14) некомпланарен плоскости. Это доказывается так же, как для прямой и ее главного вектора на сл.23 т.5. Если его отложить от точки на плоскости, то он будет направлен в одно из полупространств. Аналогично предложению сл.24 т.5 доказывается следующее утверждение.

## Предложение

Точка  $K(x_K, y_K, z_K)$  принадлежит тому полупространству, в которую направлен главный вектор плоскости  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ , отложенный от точки на этой плоскости, тогда и только тогда, когда  $Ax_K + By_K + Cz_K + D > 0$ .

## Определение

*Решением* неравенства  $Ax + By + Cz + D > 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , называется упорядоченная пара чисел  $(x_0, y_0, z_0)$ , для которых  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D > 0$ .

Из предложения предыдущего слайда получается

## Следствие 1

Множество всех решений неравенства  $Ax + By + Cz + D > 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , является координатами всевозможных точек того из полуполупространств, на которые плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$  разбивает пространство, в которое направлен главный вектор этой плоскости.

Еще одно следствие предложения сл.20 весьма полезно при решении задач.

## Следствие 2

Две точки лежат по одну сторону от данной плоскости (т.е. в одной полуполупространстве) тогда и только тогда, когда при подстановке их координат в левую часть уравнения этой плоскости получаются числа одного знака.

Заметим, что при почленном умножении уравнения плоскости на  $-1$  получается уравнение той же плоскости, но главный вектор заменяется на противоположный.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана плоскость  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  и точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ .

## Предложение

Расстояние от точки  $M_1$  до плоскости  $\pi$  выражается формулой

$$d(M_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

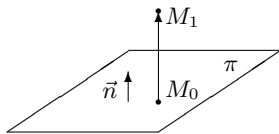


Рис. 2

↓ Опустим из точки  $M_1$  перпендикуляр на плоскость  $\pi$ . Основание перпендикуляра обозначим  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть  $\vec{n} = (A, B, C)$  — нормальный вектор плоскости (см. рис.2). Тогда  $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$  и поэтому  $|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n}| = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot |\vec{n}|$ .

Имеем  $d(M_1, \pi) = |\overrightarrow{M_0M_1}|$ ,

$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ,  $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ . Поскольку  $M_0 \in \pi$ ,

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ , откуда  $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{n} = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ .

Таким образом,  $|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D| = d(M_1, \pi) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ . ↑

При знакомстве с основными утверждениями о прямых на плоскости и плоскостях в пространстве обращает на себя внимание явное сходство многих из упомянутых утверждений. Это теоремы об общих уравнениях, условия, определяющие взаимное расположение прямых или плоскостей, а также точек относительно прямых или плоскостей, утверждения о полуплоскостях и полупространствах, наконец, формулы для расстояния от точки до прямой или до плоскости.

Это сходство объясняется тем фактом, что размерность (т.е. количество векторов в базисе) прямой равна 1, плоскости — 2 и пространства — 3, и размерность прямой на 1 меньше размерности плоскости, а размерность плоскости на 1 меньше размерности пространства.

Материал следующей темы показывает, что многие утверждения о прямых в пространстве совсем не похожи на соответствующие утверждения о прямых на плоскости и плоскостях.



## Задача

В прямоугольной декартовой системе координат найти уравнение плоскости, симметричной плоскости  $\pi : 2x - 3y + 6z - 17 = 0$  относительно точки  $P(2, 0, 1)$ .

Решение. Легко видеть, что искомая плоскость параллельна данной плоскости и точка  $P$  равноудалена от обеих плоскостей. Находим расстояние  $d(P, \pi) = \frac{|4 + 6 - 17|}{7} = 1$ . Уравнение искомой плоскости

$\pi' : 2x - 3y + 6z + \lambda = 0$ . Имеем  $d(P, \pi') = \frac{|4 + 6 + \lambda|}{7} = 1$ , откуда  $|10 + \lambda| = 7$  и  $\lambda = -3$ .

Ответ: уравнение плоскости, симметричной плоскости  $\pi$  относительно точки  $P$ :  $2x - 3y + 6z - 3 = 0$ .

## Задача

В произвольной декартовой системе координат на плоскости  $\pi : 2x - 3y + 6z - 18 = 0$  зафиксированы точки  $A(3, 2, 3)$ ,  $B(6, 2, 2)$  и  $C(3, -2, 1)$ . На плоскости  $\pi$  рассматривается система координат  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Найти в этой системе координат уравнение прямой пересечения плоскости  $\pi$  с плоскостью  $\pi' : 5x + 4y - 6z + 15 = 0$ .

Решение. Запишем параметрические уравнения плоскости, используя в качестве начальной точки точку  $A$  и в качестве направляющих векторов

$$\text{векторы } \overrightarrow{AB} = (3, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (0, -4, -2): \begin{cases} x = 3 + 3u, \\ y = 2 - 4v, \\ z = 3 - u - 2v. \end{cases}$$

Эти уравнения связывают пространственные координаты  $(x, y, z)$  любой точки на плоскости  $\pi$  с плоскостными координатами  $(u, v)$  этой точки.

Поэтому прямая  $\ell = \pi \cap \pi_1$  состоит из точек, координаты которых удовлетворяют параметрическим уравнениям плоскости  $\pi$  и уравнению плоскости  $\pi_1$ :  $5(3 + 3u) + 4(2 - 4v) - 6(3 - u - 2v) + 15 = 0$ , или  $21u - 4v + 20 = 0$ .

Ответ: уравнение прямой в плоскостной системе координат  $21u - 4v + 20 = 0$ .

## Задача

Показать, что три плоскости  $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 1$ ,  $\pi_2 : 3x + 4y + 5z = 3$ ,  $\pi_3 : 4x + 5y + 6z = 1$  образуют бесконечную “призму”. Найти уравнение плоскости  $\pi_4$ , параллельной плоскости  $\pi_3$  и проходящей через прямую  $\pi_1 \cap \pi_2$ .

Решение. Так как плоскости  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  попарно пересекаются, достаточно проверить, что  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ . Запишем систему из уравнений плоскостей  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  и убедимся, что она несовместна. Для этого решим по теореме Крамера относительно  $x, y$  систему из уравнений плоскостей

$$\pi_1, \pi_2: \begin{cases} 2x + 3y = 1 - 4z \\ 3x + 4y = 3 - 5z. \end{cases} \quad \text{Имеем } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 - 4z & 3 \\ 3 - 5z & 4 \end{vmatrix} = -5 - z, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 - 4z \\ 3 & 3 - 5z \end{vmatrix} = 3 + 2z, \quad \text{откуда}$$

$x = 5 + z, y = -3 - 2z$ . Подставив эти выражения в левую часть уравнения плоскости  $\pi_3$ , получим  $4(5 + z) + 5(-3 - 2z) + 6z = 5 \neq 1$ .

Следовательно, исходная система несовместна.

Уравнение плоскости  $\pi_4$  будем искать с помощью уравнения собственного пучка плоскостей (см. формулу (??) сл.17). Имеем

$$\pi_4 : \lambda(2x + 3y + 4z - 1) + \mu(3x + 4y + 5z - 3) = 0 \text{ или}$$

$$(2\lambda + 3\mu)x + (3\lambda + 4\mu)y + (4\lambda + 5\mu)z - \lambda - 3\mu = 0). \text{ Из условия } \pi_4 \parallel \pi_3$$

следует  $\frac{2\lambda + 3\mu}{4} = \frac{3\lambda + 4\mu}{5} = \frac{4\lambda + 5\mu}{6}$ , откуда  $2\lambda + \mu = 0$ . Взяв  $\lambda = -1$ ,  $\mu = 2$ , получаем  $\pi_4 : 4x + 5y + 6z - 5 = 0$ .

Ответ:  $\pi_4 : 4x + 5y + 6z - 5 = 0$ .