Тема 5: Прямая на плоскости

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Геометрический образ уравнения на плоскости

Зафиксируем на плоскости произвольную декартову систему координат Oxy.

Определения

Геометрическим образом уравнения $F(x, y) = 0$ относительно системы координат Oxy называется множество ℓ всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.
При этом говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *задает* множество точек ℓ.
Указанное уравнение называется *координатным уравнением* множества точек ℓ.
Обозначение: $\ell : F(x, y) = 0$.

Точное определение линии использует понятия, выходящие за пределы курса аналитической геометрии, и дается в курсе математического анализа. Геометрический образ даже алгебраического уравнения может как быть линией в привычном смысле, так и существенно отличаться от линии.
Например, геометрическим образом уравнения

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

относительно прямоугольной декартовой системы координат на плоскости является окружность с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом r.

Зафиксируем на плоскости произвольную декартову систему координат Oxy. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — некоторые функции, определенные на некотором множестве I действительных чисел (чаще всего это интервал, отрезок или все множество $\mathbb{R}$).

Определение

Говорят, что уравнения $x = f(t)$, $y = g(t)$, где $t \in I$, *определяют* множество ℓ всех точек на плоскости, координаты которых относительно системы координат Oxy есть $(f(t), g(t))$, когда t пробегает множество I. Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями* множества точек ℓ.

Обозначение: $\ell : \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases} \quad (t \in I).$

Например, уравнения $\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases} \quad (0 < t \leq 2\pi)$ относительно прямоугольной декартовой системы координат на плоскости определяют окружность с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом r.

Зафиксируем на плоскости произвольную декартову систему координат Oxy. Пусть ℓ — прямая на плоскости, проходящая через точку M_0. Возьмем на этой прямой некоторый базис $\vec{a}$.

Определение

Точка M_0 называется *начальной точкой* прямой ℓ, а вектор $\vec{a}$ — ее *направляющим вектором*.

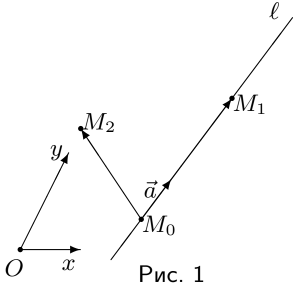

Рис. 1

Из геометрических соображений легко понять, что произвольная точка плоскости M будет лежать на прямой ℓ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

Согласно предложению и следствию сл.15 т.2, так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Далее, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0}$. Таким образом, $M \in \ell \Leftrightarrow \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = t\vec{a}$ и мы приходим к векторному уравнению прямой на плоскости.

Векторное уравнение прямой на плоскости

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Обозначим координаты точки M через (x, y), точки M_0 через (x_0, y_0) и пусть $[\vec{a}] = (p, q)$. Тогда из (1) получаются

Параметрические уравнения прямой на плоскости

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть ℓ — прямая на плоскости, проходящая через точку M_0 с известными координатами (x_0, y_0), и имеющая направляющий вектор $\vec{a}$, $[\vec{a}] = (p, q)$, $p^2 + q^2 > 0$, поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости. Так как $M \in \ell \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$, используя критерий коллинеарности векторов по координатам (см. сл.22 т.2), получаем

Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\ell : \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \tag{3}$$

Это координатное уравнение прямой на плоскости в виде пропорции.

Для записи и параметрических, и канонического уравнений прямой на плоскости используется одна и та же информация о прямой: координаты начальной точки и координаты направляющего вектора. Поэтому переход от канонического уравнения к параметрическим и обратно не представляет никаких трудностей.

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки

С помощью канонического уравнения можно записать уравнение прямой ℓ, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$:

$$\ell : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{4}$$

В самом деле, вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ является направляющим для прямой ℓ.

Теорема об общем уравнении прямой на плоскости

Определение

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — фиксированные числа и A и B одновременно не обращаются в нуль, называется *алгебраическим уравнением первой степени с двумя неизвестными*.

Теорема

В произвольной декартовой системе координат на плоскости прямые и только они являются геометрическим образами алгебраических уравнений первой степени с двумя неизвестными.

$\Downarrow$ Пусть ℓ — произвольная прямая на плоскости. Распишем в ее каноническом уравнении (3) пропорцию по определению: $(x - x_0)q = (y - y_0)p$. Раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую часть. Получим $qx - py + (py_0 - qx_0) = 0$. Положим $A = q$, $B = -p$, $C = py_0 - qx_0$. Тогда последнее уравнение принимает вид $Ax + By + C = 0$, причем $A = q$ и $B = -p$ одновременно не обращаются в нуль. Следовательно, $\ell : Ax + By + C = 0$, что и требуется доказать.

Окончание доказательства теоремы

Пусть теперь $Ax + By + C = 0$ — произвольное алгебраическое уравнение первой степени с двумя неизвестными и m — его геометрический образ. Предположим для определенности, что $A \neq 0$. Тогда точка M_0 с координатами $x_0 = -C/A$ и $y_0 = 0$ принадлежит m, так как

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{5}$$

Возьмем вектор $\vec{a}$ с координатами $(-B, A)$ и обозначим через ℓ прямую, проходящую через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{a}$. Докажем, что $m = \ell$. Используя каноническое уравнение (3), имеем $\ell : \dfrac{x - x_0}{-B} = \dfrac{y - y_0}{A}$. Раскроем пропорцию: $(x - x_0)A = (y - y_0)(-B)$. Это уравнение равносильно следующему: $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Из равенства (5) следует $C = -Ax_0 - By_0$. Таким образом, $\ell : Ax + By + C = 0$ и $\ell = m$. Теорема полностью доказана.$\Uparrow$

Определение

Уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не обращаются в нуль, называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Общее уравнение является координатным уравнением прямой на плоскости.

Уравнение прямой в отрезках

Из доказательства теоремы получается

Следствие

Если прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор $\vec{a}$ с координатами $(-B, A)$ является направляющим вектором этой прямой.

Если в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ прямой ℓ все коэффициенты отличны от нуля, то оно равносильно уравнению $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$.

Полагая $a = -C/A$, $b = -C/B$, получаем

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6}$$

Прямая ℓ пересекает оси Ox и Oy соответственно в точках с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$.

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B) перпендикулярен к направляющему вектору $\vec{a}$ с координатами $(-B, A)$, так как их скалярное произведение $\vec{n}\vec{a} = A(-B) + BA = 0$. Поэтому вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к прямой ℓ.

Определение

Вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B) называется *нормальным вектором* прямой ℓ, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

По нормальному вектору и начальной точке уравнение прямой однозначно восстанавливается.

В самом деле, точка плоскости $M(x, y)$ принадлежит прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}$ с координатами (A, B) тогда и только тогда, когда

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0. \tag{7}$$

Это векторное уравнение прямой по точке и нормальному вектору. Расписывая в нем скалярное произведение через координаты векторов, получаем

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Прямая, перпендикулярная ненулевому вектору $\vec{n}$ с координатами (A, B), и проходящая через точку M_0 с координатами (x_0, y_0), задается уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$. Тогда это уравнение равносильно уравнению

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\ell: \; y = kx + b, \tag{9}$$

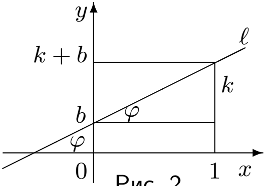

Рис. 2

где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой ℓ. Обозначим через φ угол от оси Ox до прямой ℓ (см. рис.2). Тогда $k = \operatorname{tg} \varphi$. Прямая ℓ пересекает ось Oy в точке с координатами $(0, b)$.

Уравнение с угловым коэффициентом может быть записано только для прямых, не параллельных оси Oy.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Зафиксируем на плоскости произвольную декартову систему координат Oxy. Пусть $\ell_1 : Ax_1 + B_1y + C_1 = 0$, $\ell_2 : Ax_2 + B_2y + C_2 = 0$ — прямые на плоскости. По коэффициентам уравнений выясним, как располагаются прямые на плоскости. Взаимное расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2 определяется множеством их общих точек. Координаты общей точки суть частное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Ax_1 + B_1y = -C_1, \\ Ax_2 + B_2y = -C_2. \end{cases} \qquad (10)$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то по теореме Крамера система линейных уравнений (10) имеет единственное решение, и потому прямые пересекаются.

Пусть $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$. Если при этом $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то система линейных уравнений (10) несовместна, и прямые параллельны.

Если же $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то уравнения в (10) равносильны, поскольку коэффициент пропорциональности отличен от нуля в силу условий $A_1^2 + B_1^2 > 0$, $A_2^2 + B_2^2 > 0$. В этом случае прямые совпадают.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Необходимые и достаточные условия

Легко понять, что справедливы и обратные импликации для высказанных на сл.14 утверждений. Таким образом, для прямых $\ell_1 : Ax_1 + B_1y + C_1 = 0$, $\ell_2 : Ax_2 + B_2y + C_2 = 0$ имеют место следующие утверждения.

Признаки взаимного расположения двух прямых на плоскости

ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются $\iff \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$;

ℓ_1 и ℓ_2 параллельны $\iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

ℓ_1 и ℓ_2 совпадают $\iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Несобственный пучок прямых на плоскости

Определение

Несобственным пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых плоскости, параллельных данной прямой или совпадающих с ней.

Ясно, что несобственный пучок определяется любой своей прямой. Легко понять, что любая прямая из несобственного пучка, определяемого прямой $\ell : Ax + By + C = 0$, имеет следующее уравнение.

Уравнение несобственного пучка

$$Ax + By + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Определение

Собственным пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых на этой плоскости, проходящих через её фиксированную точку.

Ясно, что собственный пучок определяется любой парой своих различных прямых.

Теорема

Пусть $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $\ell_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — пересекающиеся прямые. Произвольная прямая принадлежит собственному пучку прямых на плоскости, определяемому прямыми ℓ_1 и ℓ_2 тогда и только тогда, когда ее уравнение может быть представлено в виде

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \lambda^2 + \mu^2 > 0. \quad (11)$$

Это *уравнение собственного пучка прямых на плоскости*.

Доказательство. Необходимость

$\Downarrow$Положим $M_0 = \ell_1 \cap \ell_2$. Пусть ℓ — геометрический образ произвольного уравнения вида (11). Ясно, что $M_0 \in \ell$. Убедимся, что (11) является общим уравнением прямой на плоскости. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены: $(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$. Предположим, что $\begin{cases} A_1\lambda + A_2\mu = 0, \\ B_1\lambda + B_2\mu = 0. \end{cases}$ Так как $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, по теореме Крамера получаем $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$. Поскольку $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, получаем противоречие с тем, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются. Следовательно, $A_1\lambda + A_2\mu \neq 0$ или $B_1\lambda + B_2\mu \neq 0$, и (11) является общим уравнением прямой на плоскости, которая принадлежит собственному пучку, определяемому прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

Доказательство. Достаточность

Пусть теперь ℓ — произвольная прямая на плоскости, которая принадлежит собственному пучку, определяемому прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Если $\ell = \ell_1$, то положим $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Если $\ell = \ell_2$, то положим $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Предположим, что $\ell \neq \ell_1$ и $\ell \neq \ell_2$. Тогда на прямой ℓ найдется точка M_1, не лежащая ни на ℓ_1, ни на ℓ_2. Достаточно взять любую точку на прямой ℓ, отличную от M_0. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — фиксированная такая точка. Так как прямая ℓ однозначно определяется точками M_0 и M_1 и координаты M_0 удовлетворяют уравнению (11), достаточно подобрать ненулевые числа λ и μ так, чтобы координаты точки M_1 удовлетворяли этому уравнению. Подставим x_1, y_1 в уравнение (11): $\lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$. Так как $M_1 \notin \ell_1 \cup \ell_2$, имеем $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0$ и $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \neq 0$. Поэтому достаточно взять $\lambda = 1$ и $\mu = -\dfrac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}$.$\Uparrow$

Определение

Если две прямые параллельны или совпадают, то угол между ними по определению равен нулю.

Пересекающиеся прямые образуют между собой четыре угла. Величину одного из смежных углов можно определить с помощью направляющих векторов прямых. Если прямые заданы общими уравнениями $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\ell_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то их направляющие векторы $\vec{a}_1 = (-B_1, A_1)$ и $\vec{a}_2 = (-B_2, A_2)$ образуют угол φ, для которого $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$. Вычислив скалярное произведение и длины векторов в прямоугольной декартовой системе координат, получаем формулу для косинуса угла между прямыми.

$$\cos(\widehat{\ell_1, \ell_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{12}$$

Эта же формула получается, если взять вместо направляющих векторов нормальные.

Условие перпендикулярности прямых

Если прямые заданы общими уравнениями $\ell_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\ell_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ в прямоугольной декартовой системе координат, то они перпендикулярны в том и только том случае, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Определение

Ориентированным углом между пересекающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называется угол, на который нужно повернуть прямую ℓ_1 вокруг точки пересечения против часовой стрелки до совпадения с прямой ℓ_2.

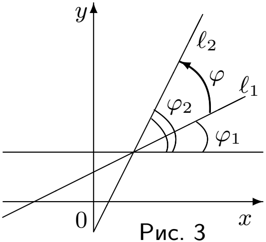

Рис. 3

Ясно (см.рис.3), что ориентированный угол φ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равен разности $\varphi_2 - \varphi_1$ углов, которые эти прямые образуют с лучом Ox. Пусть прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $\ell_j : k_j x + b_j$, $j = 1, 2$. Тогда $\operatorname{tg} \varphi_j = k_j$ и $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}$.
Отсюда получается

Формула для тангенса ориентированного угла между прямыми

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = -1$.

Зафиксируем аффинную декартову систему координат Oxy на плоскости и прямую $\ell : Ax + By + C = 0$ на этой плоскости. Тогда

$$A^2 + B^2 > 0. \tag{13}$$

Определение

Вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B) называется *главным вектором* прямой ℓ.

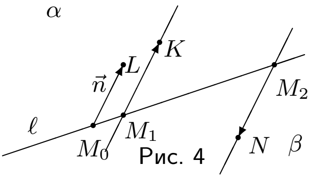

Рис. 4

Докажем, что $\vec{n} \nparallel \ell$. $\Downarrow$Отложим вектор $\vec{n}$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямой ℓ. Получим точку $L(x_L, y_L)$. Так как $L = M_0 + \vec{n}$, имеем $x_L = x_0 + A, y_L = y_0 + B$. Далее, $Ax_L + By_L + C = Ax_0 + A^2 + By_0 + B^2 + C = A^2 + B^2$, поскольку $Ax_0 + By_0 + C = 0$ в силу условия $M_0 \in \ell$. Согласно (13) $Ax_L + By_L + C > 0$, т.е. $L \notin \ell$.$\Uparrow$

Таким образом, рис.4 корректен. Прямая ℓ разбивает плоскость на части, называемыми *полуплоскостями*. На рис.4 они обозначены буквами α и β. Мы считаем полуплоскости открытыми множествами, т.е. $\alpha \cap \ell = \beta \cap \ell = \emptyset$. Главный вектор прямой, отложенный от точки на этой прямой, направлен в одну из полуплоскостей.

Предложение

Точка $K(x_K, y_K)$ принадлежит той полуплоскости, в которую направлен главный вектор прямой $\ell : Ax + By + C = 0$, отложенный от точки на этой прямой, тогда и только тогда, когда $Ax_K + By_K + C > 0$.

$\Downarrow$Возьмем произвольную точку $K \in \alpha$ (см. рис.4) и проведем через нее прямую, коллинеарную главному вектору $\vec{n}$. Так как $\vec{n} \nparallel \ell$, эта прямая пересечет прямую ℓ в некоторой точке M_1. Пусть $K(x_K, y_K)$, $M_1(x_1, y_1)$. Поскольку $M_1 \in \ell$, имеем $Ax_1 + By_1 + C = 0$. По определению, $\vec{n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{M_1K}$; следовательно, $\overrightarrow{M_1K} = s \cdot \vec{n}$ для некоторого числа $s > 0$. Так как $K = M_1 + s \cdot \vec{n}$, имеем $x_k = x_1 + sA, y_K = y_1 + sB$. Далее, $Ax_K + By_K + C = Ax_1 + sA^2 + By_1 + sB^2 + C = s(A^2 + B^2)$, поскольку $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Из условий $s > 0$ и (13) следует $Ax_K + By_K + C > 0$.

Убедимся, что для любой точки $N(x_N, y_N)$, лежащей в полуплоскости β, справедливо неравенство $Ax_N + By_N + C < 0$. Для этого проведем через точку N прямую, коллинеарную главному вектору $\vec{n}$ (см.рис.4). Так как $\vec{n} \nparallel \ell$, эта прямая пересечет прямую ℓ в некоторой точке $M_2(x_2, y_2)$. Повторяя рассуждения конца предыдущего абзаца и приняв во внимание, что $\vec{n} \uparrow\downarrow \overrightarrow{M_2N}$, т.е. $\overrightarrow{M_2N} = q \cdot \vec{n}$ для некоторого числа $q < 0$, придем к $Ax_N + By_N + C = q(A^2 + B^2) < 0$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Определение

Решением неравенства $Ax + By + C > 0$, где $A^2 + B^2 > 0$, называется упорядоченная пара чисел (x_0, y_0), для которых $Ax_0 + By_0 + C > 0$.

Из предложения предыдущего слайда получается

Следствие 1

Множество всех решений неравенства $Ax + By + C > 0$, где $A^2 + B^2 > 0$, является координатами всевозможных точек той из полуплоскостей, на которые прямая $Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость, в которую направлен главный вектор этой прямой.

Еще одно следствие весьма полезно при решении задач.

Следствие 2

Две точки плоскости лежат по одну сторону от данной прямой (т.е. в одной полуплоскости) тогда и только тогда, когда при подстановке их координат в левую часть уравнения этой прямой получаются числа одного знака.

При почленном умножении уравнения прямой на -1 получается уравнение той же прямой, а главный вектор заменяется на противоположный.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана прямая $\ell : Ax + By + C = 0$ и точка $M_1(x_1, y_1)$.

Предложение

Расстояние от точки M_1 до прямой ℓ выражается формулой

$$d(M_1, \ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

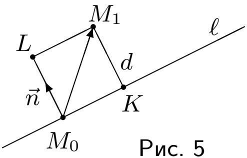

Рис. 5

$\Downarrow$Зафиксируем на прямой произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Отложим от точки M_0 нормальный вектор $\vec{n}$ прямой ℓ и рассмотрим проекцию вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на вектор $\vec{n}$ (см. рис. 5). Очевидно, что расстояние $d = d(M_1, \ell)$ равно $|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}|$.

По формуле (5) сл.7 т.3 $\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1} = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}}{|\vec{n}|}$.

Так как $[\vec{n}] = (A, B)$ и $[\overrightarrow{M_0M_1}] = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, имеем $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0) = Ax_1 + By_1 + C$, поскольку $Ax_0 + By_0 + C = 0$ ввиду условия $M_0 \in \ell$. Отсюда непосредственно следует требуемое утверждение.$\Uparrow$

Задача

В прямоугольной декартовой системе координат даны прямая $\ell : 2x - 3y + 7 = 0$ и точка $P(2, -5)$. Найти координаты точки Q, симметричной точке P относительно прямой ℓ.

Решение. Точка Q лежит на прямой m, проходящей через точку P перпендикулярно к прямой ℓ на таком же расстоянии от нее, как точка P. Прямая m пересекает прямую ℓ в точке R, называемой проекцией точки P на прямую ℓ. Точка R делит пополам отрезок $[P, Q]$.
Запишем уравнение прямой m. Направляющий вектор $\vec{a} = (3, 2)$ прямой ℓ является для прямой m нормальным. Используем уравнение (8) сл.12: $3(x - 2) + 2(y + 5) = 0$ или $m : 3x + 2y + 4 = 0$. Так как $R = \ell \cap m$, координаты точки R находим, решая систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 3x + 2y = -4. \end{cases}$ Получаем $R(-2, 1)$. Пусть $Q(x_0, y_0)$. Так как точка R — середина отрезка $[P, Q]$, имеем $\dfrac{2 + x_0}{2} = -2$, $\dfrac{-5 + y_0}{2} = 1$, откуда $x_0 = -6$, $y_0 = 7$.
Ответ: Точка $Q(-6, 7)$ симметрична точке P относительно прямой ℓ.

Биссектриса угла, в котором лежит данная точка

Задача

В прямоугольной декартовой системе координат даны прямые $\ell_1 : 2x - 3y - 7 = 0$ и $\ell_2 : 3x - 2y + 4 = 0$. Найти уравнение биссектрисы того угла между данными прямыми, в котором лежит точка $M_0(1, 1)$.

Решение. Биссектриса угла состоит из всех точек, равноудаленных от сторон угла. Приравнивая для произвольной точки $M(x, y)$ расстояния от нее до прямых ℓ_1 и ℓ_2, получаем уравнения двух взаимно перпендикулярных биссектрис: $\frac{|2x - 3y - 7|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x - 2y + 4|}{\sqrt{13}}$. Точки на искомой биссектрисе лежат по ту же сторону от каждой из прямых, что и точка $M_0(1, 1)$. В соответствии с эти раскрываем модули, учитывая, что $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 7 < 0$ и $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 > 0$: $\frac{-2x + 3y + 7}{\sqrt{13}} = \frac{3x - 2y + 4}{\sqrt{13}}$, откуда $5x - 5y - 3 = 0$.

Ответ: уравнение биссектрисы $5x - 5y - 3 = 0$.