Тема 4: Векторное и смешанное произведения

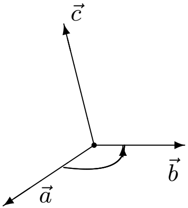
А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Определение

Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется *правой*, если, когда все векторы отложены от одной точки, наблюдателю, смотрящему с конца изображения вектора $\vec{c}$, поворот по наименьшему углу от изображения вектора $\vec{a}$ к изображению вектора $\vec{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.



Изменение ориентации тройки

Из трех векторов можно организовать 6 упорядоченных троек.

Определение

Говорят, что тройки $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ являются *циклическими перестановками* тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Оставшиеся 3 тройки называются *нециклическими перестановками* тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$\begin{tikzcd}
\vec{a} \arrow[rr] & & \vec{b} \arrow[dl] \\
& \vec{c} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Легко убедиться, что если тройка является правой (соответственно левой), то и ее циклические перестановки будут правыми (соответственно левыми) тройками, а нециклические – левыми (соответственно правыми) тройками. Таким образом, имеет место

Наблюдение

Циклическая перестановка векторов сохраняет ориентацию тройки, а нециклическая изменяет ее.

Определение

Векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом. Если $\vec{a} || \vec{b}$, то $\vec{c} = \vec{0}$. Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Тогда $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ и тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая.
Обозначения: $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$.

В случае неколлинеарных векторов длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на изображениях векторов $\vec{a}, \vec{b}$, отложенных от одной точки.

Теорема

Для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ и числа $t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:
1) $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$ (антикоммутативность);
2) $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;
3) $[t\vec{a}, \vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$;
4) $[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;
5) $[\vec{a}, t\vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1). Оно очевидно, если $\vec{a} \| \vec{b}$. Предположим, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Из определения следует, что $|[\vec{b}, \vec{a}]| = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ и $[\vec{b}, \vec{a}] \| [\vec{a}, \vec{b}]$. Так как тройка $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ – правая, тройка $\vec{b}, \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]$ – левая. Поскольку тройка $\vec{b}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{a}]$ – правая, заключаем, что $[\vec{b}, \vec{a}] \uparrow\downarrow [\vec{a}, \vec{b}]$, откуда следует утверждение 1).
Утверждения 2) и 3) будут доказаны позже с помощью смешанного произведения.

Доказательства утверждений 4) и 5)

Утверждение 4) вытекает из утверждений 1) и 2):
$[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})]=-[(\vec{b}+\vec{c}),\vec{a}]=-([\vec{b},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{a}])=-[\vec{b},\vec{a}]-[\vec{c},\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}].$
Аналогично утверждение 5) выводится из утверждений 1) и 3):
$[\vec{a},t\vec{b}]=-[t\vec{b},\vec{a}]=-t[\vec{b},\vec{a}]=t[\vec{a},\vec{b}].$ $\Uparrow$

Понятие смешанного произведения

Определение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$, т.е. скалярное произведение векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Теорема о смешанном произведении

Если три вектора компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.
Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, то модуль их смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на изображениях этих векторов, отложенных от одной точки, и смешанное произведение положительно [соотв. отрицательно], если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая [соотв. левая].

Доказательство

$\Downarrow$Предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ и следовательно $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$ и этот вектор перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c}$ и скалярное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = 0$. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то по определению $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = 0$. Значит, во всех случаях смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно 0.

Предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны. Отложим эти векторы от точки A и построим на их изображениях параллелепипед (см. рис. 1). Объем параллелепипеда $V = Sh$. Так как $S = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$, $h = \left|\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}\right|$ и $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}\right| = \left|\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}\right| = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|\left|\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}\right|$, заключаем, что $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

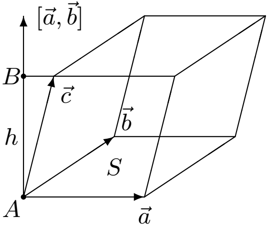


Рис. 1

Во всех случаях $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c}$.

Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, то угол между векторами $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$ острый, и поэтому $\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c} > 0$, а значит и $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} > 0$.

Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая, то угол между векторами $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\vec{c}$ тупой, и поэтому $\text{пр}_{[\vec{a},\vec{b}]}\vec{c} < 0$, а значит и $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} < 0$.$\Uparrow$

Следствия из теоремы о смешанном произведении

Следующее утверждение немедленно получается из теоремы.

Следствие 1

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Как отмечалось на сл.3, из трех векторов можно организовать 6 упорядоченных троек. Объем параллелепипеда, построенного на изображениях трех векторов, отложенных от одной точки, не зависит от ориентации тройки. Поэтому при циклической перестановке аргументов смешанное произведение не изменяется, а при нециклической изменяет знак на противоположный.

Следствие 2

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ справедливы равенства
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.

Свойства смешанного произведения

Смешанное произведение линейно по каждому аргументу.

Предложение

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{b}_1, \vec{c}, \vec{c}_1, \in V_g$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$ справедливы равенства
$(\vec{a}+\vec{a}_1)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_1\vec{b}\vec{c}$, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
$\vec{a}(\vec{b}+\vec{b}_1)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_1\vec{c}$, $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{c}_1) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1$, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

$\Downarrow$Так как $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$, линейность по третьему аргументу следует из линейности скалярного произведения (см. сл.8 т.3): $\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{c}_1) =$
$[\vec{a}, \vec{b}](\vec{c}+\vec{c}_1) = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} + [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}_1 = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1$
и $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}](t\vec{c}) = t([\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
Докажем линейность по первому аргументу. В силу следствия 2 и линейности по третьему аргументу имеем
$(\vec{a}+\vec{a}_1)\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(\vec{a}+\vec{a}_1) = \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \vec{b}\vec{c}\vec{a}_1 = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_1\vec{b}\vec{c}$ и
$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.
Линейность по второму аргументу доказывается аналогично.$\Uparrow$

Доказательство свойств векторного произведения

$\Downarrow$Докажем, что $[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$.
Зафиксируем векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_g$. Для произвольного вектора $\vec{x}\in V_g$, используя линейность смешанного произведения по первому аргументу, имеем $[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$
$[\vec{a},\vec{c}]\vec{x}+[\vec{b},\vec{c}]\vec{x}=([\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}])\vec{x}$, т.е. $[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}]\vec{x}=([\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}])\vec{x}$. В силу слабого закона сокращения для скалярного произведения (сл.13 т.3) получаем требуемое.
Аналогично доказывается, что $[t\vec{a},\vec{b}]=t[\vec{a},\vec{b}]$.
Таким образом, векторное произведение оказывается линейно по первому и по второму аргументу.$\Uparrow$

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный базис в пространстве V_g, $\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Тогда имеет место формула

Векторное произведение в координатах

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{b}_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{b}_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{b}_1.$$

Для доказательства используем линейность векторного произведения по обоим аргументам: $[\vec{x}, \vec{y}] = [x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3, y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3] = x_1y_1[\vec{b}_1, \vec{b}_1] + x_1y_2[\vec{b}_1, \vec{b}_2] + x_1y_3[\vec{b}_1, \vec{b}_3] + x_2y_1[\vec{b}_2, \vec{b}_1] + x_2y_2[\vec{b}_2, \vec{b}_2] + x_2y_3[\vec{b}_2, \vec{b}_3] + x_3y_1[\vec{b}_3, \vec{b}_1] + x_3y_2[\vec{b}_3, \vec{b}_2] + x_3y_3[\vec{b}_3, \vec{b}_3]$. Так как $[\vec{z}, \vec{z}] = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{z} \in V_g$, $[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = \vec{b}_3$, $[\vec{b}_1, \vec{b}_3] = -\vec{b}_2$ и $[\vec{b}_2, \vec{b}_3] = \vec{b}_1$, с учетом антикоммутативности векторного произведения получаем требуемое.

Формулу для координат векторного произведения удобно запоминать в виде символического определителя с первой строкой из векторов (его нужно разложить по первой строке).

Векторное произведение в правом ортонормированном базисе

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_g$ и $[\vec{x}]_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $[\vec{y}]_B = (y_1, y_2, y_3)^\top$, $[\vec{z}]_B = (z_1, z_2, z_3)^\top$. Тогда
$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3).$$

$\Downarrow$Имеем, пользуясь линейностью смешанного произведения по всем аргументам, $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \left(\sum_{i=1}^3 x_i\vec{b}_i\right)\left(\sum_{j=1}^3 y_j\vec{b}_j\right)\left(\sum_{k=1}^3 z_k\vec{b}_k\right) =$
$\sum_{i=1}^3 \left(x_i\vec{b}_i \left(\sum_{j=1}^3 y_j\vec{b}_j\right)\left(\sum_{k=1}^3 z_k\vec{b}_k\right)\right) =$
$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(x_i\vec{b}_i y_j\vec{b}_j \left(\sum_{k=1}^3 z_k\vec{b}_k\right)\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i\vec{b}_i y_j\vec{b}_j z_k\vec{b}_k =$
$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i y_j z_k \vec{b}_i\vec{b}_j\vec{b}_k$. Если i, j, k не все различны, то векторы $\vec{b}_i, \vec{b}_j, \vec{b}_k$ компланарны и в силу следствия 1 сл.9 $\vec{b}_i\vec{b}_j\vec{b}_k = 0$.
Следовательно, $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i y_j z_k \vec{b}_i\vec{b}_j\vec{b}_k = x_1y_2z_3\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 +$
$x_1y_3z_2\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + x_2y_1z_3\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + x_2y_3z_1\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + x_3y_1z_2\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + x_3y_2z_1\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1 =$
$(x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1)\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Смешанное произведение в координатах в правом ОНБ

Легко видеть, что смешанное произведение $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ векторов правого ортонормированного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ равно 1. Из теоремы сл.12 получаем

Следствие

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – произвольный правый ортонормированный базис в пространстве V_g, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_g$ и $[\vec{x}]_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $[\vec{y}]_B = (y_1, y_2, y_3)^\top$, $[\vec{z}]_B = (z_1, z_2, z_3)^\top$. Тогда $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

Теорема

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_g$ и $[\vec{x}]_B = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $[\vec{y}]_B = (y_1, y_2, y_3)^\top$, $[\vec{z}]_B = (z_1, z_2, z_3)^\top$. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

$\Downarrow$Согдасно следствию 1 сл.9, векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0. По теореме сл.12 $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)$. Так как базисные векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ не компланарны, $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Следовательно, $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$\Uparrow$

Взаимный базис

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – система векторов из V_g. Система $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ называется *взаимной* к B, если $\vec{b}_i \vec{c}_j = 1$ при $i = j$ и $\vec{b}_i \vec{c}_j = 0$ при $i \neq j$, для всех $i, j = 1, 2, 3$.

Лемма

Если B – базис V_g, то взаимная к B система C также является базисом.

От противного, если векторы $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ компланарны, то существует вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, перпендикулярный к каждому вектору $\vec{c}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Пусть $\vec{a} = a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + a_3 \vec{b}_3$. Тогда $0 = \vec{a} \cdot \vec{c}_i = (a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + a_3 \vec{b}_3) \cdot \vec{c}_i = a_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{c}_i + a_2 \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_i + a_3 \vec{b}_3 \cdot \vec{c}_i = a_i$, т.е. $a_i = 0$ при $i = 1, 2, 3$ — противоречие с условием $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Легко понять, что для любого ортонормированного базиса пространства V_g взаимным базисом является он сам.

Теорема

Для любого базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ пространства V_g существует единственный взаимный базис $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, где

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3} [\vec{b}_2, \vec{b}_3], \vec{c}_2 = \frac{1}{\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3} [\vec{b}_3, \vec{b}_1], \vec{c}_3 = \frac{1}{\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3} [\vec{b}_1, \vec{b}_2].$$

Доказательство

⇓Проверим, что указанная в формулировке теоремы система является взаимной к базису $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Так как $\vec{b}_1 \perp [\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ и $\vec{b}_1 \perp [\vec{b}_3, \vec{b}_1]$, имеем $\vec{b}_1\vec{c}_2 = \vec{b}_1\vec{c}_3 = 0$. Вычислим $\vec{b}_1\vec{c}_1 = \vec{b}_1\left(\frac{1}{\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3}[\vec{b}_2, \vec{b}_3]\right) = \frac{1}{\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3}(\vec{b}_1[\vec{b}_2, \vec{b}_3]) = \frac{\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1}{\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3} = 1$. Аналогично проверяются остальные условия из определения взаимного базиса. Значит, система $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ является взаимным базисом для базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Докажем единственность. Напомним, что через $G_B = (g_{ij})$ обозначается матрица Грама базиса $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Пусть $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ – матрица из столбцов координат в базисе B векторов некоторого взаимного базиса $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ для базиса B. Из определения и правила вычисления скалярного произведения в произвольном базисе (см. формулу (7) сл.9 т.3), с учетом того, что координаты $\vec{b}_1$ – $(1,0,0)$, $\vec{b}_2$ – $(0,1,0)$, $\vec{b}_3$ – $(0,0,1)$, следует, что $1 = \vec{b}_1\vec{a}_1 = g_{11}x_1 + g_{12}y_1 + g_{13}z_1$,
$0 = \vec{b}_2\vec{a}_1 = g_{12}x_1 + g_{22}y_1 + g_{23}z_1$, $0 = \vec{b}_3\vec{a}_1 = g_{13}x_1 + g_{23}y_1 + g_{33}z_1$. Таким образом, координаты x_1, y_1, z_1 вектора $\vec{a}_1$ являются решением крамеровской системы линейных уравнений $\begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}y_1 + g_{13}z_1 = 1, \\ g_{12}x_1 + g_{22}y_1 + g_{23}z_1 = 0, \\ g_{13}x_1 + g_{23}y_1 + g_{33}z_1 = 0. \end{cases}$

Окончание доказательства

Так как согласно предложению сл.18 т.3 $|G_B| > 0$, эта система имеет единственное решение. Следовательно, вектор $\vec{a}_1$ единствен. Аналогично проверяется. что векторы $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ определяются единственным образом с помощью систем линейных уравнений $\begin{cases} g_{11}x_2 + g_{12}y_2 + g_{13}z_2 = 0, \\ g_{12}x_2 + g_{22}y_2 + g_{23}z_2 = 1, \\ g_{13}x_2 + g_{23}y_2 + g_{33}z_2 = 0 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} g_{11}x_3 + g_{12}y_3 + g_{13}z_3 = 0, \\ g_{12}x_3 + g_{22}y_3 + g_{23}z_3 = 0, \\ g_{13}x_3 + g_{23}y_3 + g_{33}z_3 = 1. \end{cases}$$

Значит, взаимный базис единствен, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Из доказательства получается и способ нахождения координат векторов взаимного базиса в произвольном базисе. Для этого достаточно решить три системы уравнений, указанные в доказательстве теоремы. Выпишем формулы, выражающие эти координаты через миноры G_{ij} матрицы Грама G_B и ее определитель g: $x_1 = G_{11}/g$, $y_1 = G_{12}/g$, $z_1 = G_{13}/g$; $x_2 = G_{12}/g$, $y_2 = G_{22}/g$, $z_2 = G_{23}/g$; $x_3 = G_{13}/g$, $y_3 = G_{23}/g$, $z_3 = G_{33}/g$.

Отметим, что объем параллелепипеда, построенного на линейно независимых векторах $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, отложенных от одной точки, равен $\sqrt{|G_B|}$.

Пусть $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – произвольный базис в пространстве V_g, $\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3$. Тогда имеет место формула

Векторное произведение в координатах в произвольном базисе

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\vec{b}_1, \vec{b}_2] + (x_3y_1 - x_1y_3)[\vec{b}_3, \vec{b}_1] + (x_2y_3 - x_3y_2)[\vec{b}_2, \vec{b}_3].$$

Для доказательства используем линейность векторного произведения по обоим аргументам: $[\vec{x}, \vec{y}] = [x_1\vec{b}_1+x_2\vec{b}_2+x_3\vec{b}_3, y_1\vec{b}_1+y_2\vec{b}_2+y_3\vec{b}_3] = x_1y_1[\vec{b}_1, \vec{b}_1]+x_1y_2[\vec{b}_1, \vec{b}_2]+x_1y_3[\vec{b}_1, \vec{b}_3]+ x_2y_1[\vec{b}_2, \vec{b}_1]+x_2y_2[\vec{b}_2, \vec{b}_2]+x_2y_3[\vec{b}_2, \vec{b}_3]+x_3y_1[\vec{b}_3, \vec{b}_1]+x_3y_2[\vec{b}_3, \vec{b}_2]+x_3y_3[\vec{b}_3, \vec{b}_3]$. Так как $[\vec{z}, \vec{z}] = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{z} \in V_g$, с учетом антикоммутативности векторного произведения получаем требуемое.

Пусть $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ – взаимный базис для базиса $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда $[\vec{b}_2, \vec{b}_3] = (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)\vec{c}_1$, $[\vec{b}_3, \vec{b}_1] = (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)\vec{c}_2$, $[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)\vec{c}_3$, поэтому $[\vec{x}, \vec{y}] = (\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)((x_1y_2 - x_2y_1)\vec{c}_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{c}_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{c}_1) =$
$(\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3)\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{c}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{c}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{c}_3\right)$.
Следовательно, имеет место формула, в которой используется символический определитель с первой строкой из векторов (его нужно разложить по первой строке).

Векторное произведение во взаимном базисе

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \begin{vmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрические приложения векторного произведения

Вектор, перпендикулярный к двум данным векторам

Векторное произведение используется для нахождения вектора, перпендикулярного к двум данным неколлинеарным векторам.

Площадь параллелограмма и треугольника

Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на изображениях двух неколлинеарных векторов. Площадь треугольника, две стороны которого - изображения данных неколлинеарных векторов, равна половине длины векторного произведения.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Формула для площади параллелограмма на плоскости

Площадь параллелограмма, построенного на изображениях двух неколлинеарных векторов $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$, отложенных от одной точки, равна $\mod \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, т.е. модулю определителя, составленного из координат этих векторов.

Для доказательства дополним систему координат вектором $\vec{e}_3=[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$. Получим правый ортонормированный базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. В этом базисе вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1,a_2,0)$, а вектор $\vec{a}$ — $(b_1,b_2,0)$.

Следовательно, $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3$. Площадь рассматриваемого параллелограмма равна длине последнего вектора, откуда следует требуемая формула.

Геометрические приложения смешанного произведения

Компланарность трех векторов

Смешанное произведение используется для проверки компланарности трех векторов.

Ориентация тройки векторов

Смешанное произведение используется для определения ориентации тройки некомпланарных векторов (правая или левая тройка).

Объем параллелепипеда, призмы, треугольной пирамиды

Объем параллелепипеда, построенного на изображениях трех некомпланарных векторов, отложенных от одной точки, равен модулю смешанного произведения этих векторов. Объем призмы равен половине объема параллелепипеда, объем пирамиды – трети объема призмы или шестой части объема параллелепипеда.

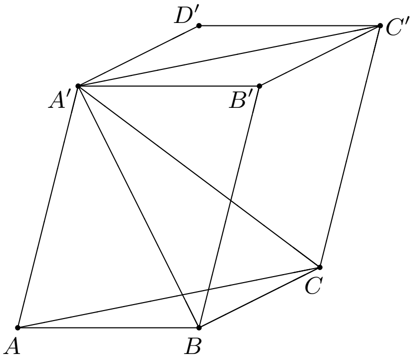


Рис. 2

Плоскость $AA'C'C$ делит параллелепипед на две треугольные призмы.
Пирамидв $ABCA'$ вписана в призму $ABCA'B'C'$.

Определение

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ имеет место равенство $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.

$\Downarrow$Предположим, что $\vec{b} \| \vec{c}$. Тогда $[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$ и $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{0}$. Пусть для определенности $\vec{b} = t\vec{c}$. Тогда
$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = (t\vec{c})(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}(t\vec{c})) = t(\vec{c})(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{c})t(\vec{a}\vec{c}) = \vec{0}$. Таким образом, в этом случае утверждение доказано.
Предположим, что $\vec{b} \nparallel \vec{c}$. Выберем в пространстве правый ортонормированный базис, положив $\vec{e}_1 = \vec{e}_{\vec{b}}$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_{[\vec{b}, \vec{c}]}$ и $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$. В этом базисе вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(b, 0, 0)$, вектор $\vec{c}$ имеет координаты $(c_1, 0, c_2)$, и вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_1, a_2, a_3).

Окончание доказательства теоремы

Имеем $[\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = -bc_3\vec{e}_2$ и

$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -bc_3 & 0 \end{vmatrix} = (a_3bc_3)\vec{e}_1 - (a_1bc_3)\vec{e}_3.$

Далее, $\vec{a}\vec{c} = a_1c_1 + a_3c_3$, $\vec{a}\vec{b} = a_1b$, $\vec{b} = b\vec{e}_1$, $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_3\vec{e}_3$ и
$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = (a_1c_1 + a_3c_3)b\vec{e}_1 - a_1b(c_1\vec{e}_1 + c_3\vec{e}_3) = (a_3bc_3)\vec{e}_1 - (a_1bc_3)\vec{e}_3.$
Следовательно, и в этом случае $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.$\Uparrow$
Из этой теоремы непосредственно получается

Следствие

Для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V_g$ имеет место равенство
$[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$.

В самом деле, $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}] = -[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]] = -(\vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a})) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$.

Векторное произведение в физике

Первое приложение — вращающий момент силы $\vec{F}$, действующей на частицу с радиус-вектором $\vec{r}$, в предположении, что ось вращения проходит через начало координат.

Момент силы

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Второе — момент количества движения частицы с радиус-вектором $\vec{r}$, имеющей импульс $\vec{p}$ в предположении, что ось вращения проходит через начало координат.

Момент количества движения

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$