Тема 3: Скалярное произведение векторов

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Компонента вектора на вектор

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Определение

Компонентой вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и определяемый следующим образом. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то изображение вектора $\vec{c}$ получаем, откладывая векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от одной точки A и взяв проекцию конца изображения вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$, проведенную через точку A (см. рис.1). Направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, где C — основание перпендикуляра, есть изображение вектора $\vec{c}$. Обозначение компоненты вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}$.

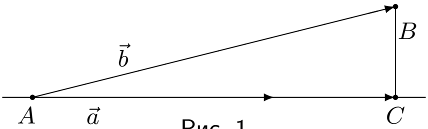

Рис. 1

Легко видеть, что изображение компоненты вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ можно получить, взяв произвольное изображение вектора $\vec{b}$ и взяв проекции его начала и конца на ось вектора $\vec{a}$. Если A', B' — проекции соответственно начала и конца изображения вектора $\vec{b}$, то $\overrightarrow{A'B'}$ будет изображением вектора $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Свойства компоненты

Предложение

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} + \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{c}$, 2) $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}(p\vec{b}) = p(\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b})$.

Эти свойства легко проверяются непосредственно.

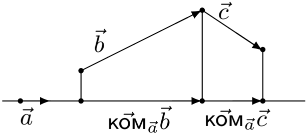

Рис. 2

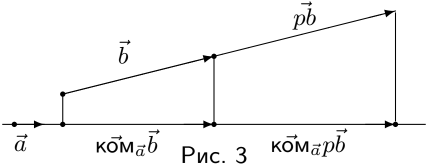

Рис. 3

Определение

Проекцией вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ называется число

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \begin{cases} |\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}|, & \text{если } \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} \upuparrows \vec{a} \text{ или } \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{0} \\ -|\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b}|, & \text{если } \overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases}$$

Из определения проекции непосредственно вытекает, что

$$\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} = (\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b})\vec{e}_{\vec{a}}, \qquad (1)$$

где $\vec{e}_{\vec{a}}$ – орт вектора $\vec{a}$ (см. сл.13 т.2). Подставив в правую часть вместо $\vec{e}_{\vec{a}}$ его выражение, получаем формулу

$$\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{a}|}\vec{a}. \qquad (2)$$

Из свойств компоненты с учетом (1) непосредственно получаются

Свойства проекции

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}$, 2) $\text{пр}_{\vec{a}}(p\vec{b}) = p(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b})$.

Предложение

Если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то пр$_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

⇓Пусть $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Отложим векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от одной точки.

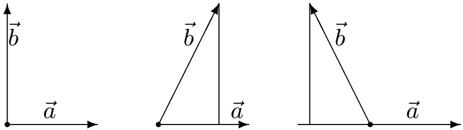

Рис. 4

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ и требуемое выполняется. Если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – острый угол, то пр$_{\vec{a}}\vec{b} > 0$, и нужное равенство следует из определения косинуса угла в прямоугольном треугольнике. Если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – тупой угол, то пр$_{\vec{a}}\vec{b} < 0$, и $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -\cos(\pi - (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}))$, поэтому требуемое также следует из определения косинуса угла в прямоугольном треугольнике.⇑

Определение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ называется число, равное $|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ и равное 0 в противном случае. Обозначение скалярного произведения: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Как обычно, точку - знак умножения при записи часто будем опускать. Выражение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^2$. Отметим, что другие степени вектора при скалярном умножении не определены. Из определения получается также следующая формула для косинуса угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{3}$$

Из определения скалярного произведения непосредственно вытекают следующие

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;
3) Если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Из предложения сл.5 с учетом определения скалярного произведения следует

Наблюдение

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то для любого вектора $\vec{b}$ справедливо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}. \tag{4}$$

Отметим, что проекция и компонента обычно вычисляются с помощью скалярного произведения по формулам

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}; \tag{5}$$

$$\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a}^2} \vec{a}, \tag{6}$$

которые легко получаются из формул сл.4 с учетом свойства 2 скалярного произведения.

Следующие два свойства называются *линейностью* скалярного произведения по второму аргументу.

Предложение

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, 2) $\vec{a} \cdot (p\vec{b}) = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1). Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение очевидно. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда на основании (4) и свойств проекции (сл.4) имеем
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}) = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
что и требовалось доказать. Утверждение 2 доказывается аналогично.$\Uparrow$

Из свойства 1 скалярного произведения (сл.6) и предложения этого слайда вытекает линейность скалярного произведения по первому аргументу.

Следствие

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда
1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, 2) $(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — базис в пространстве.

Матрица Грама базиса

Матрица $\begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2^{\,2} & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3^{\,2} \end{pmatrix}$ называется *матрицей Грама* базиса B.

Обозначения: G_B, элементы $g_{jj} = \vec{e}_j^{\,2}$ $(j = 1, 2, 3)$, $g_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j = \vec{e}_j\vec{e}_i$ для всех $1 \leq i < j \leq 3$.

Матрица Грама заключает в себе информацию о длинах базисных векторов и углах между ними. Матрица Грама для базиса из двух векторов на плоскости определяется аналогичным образом.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$.

Формула для вычисления скалярного произведения по координатам векторов в произвольном базисе

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{11}x_1y_1 + g_{22}x_2y_2 + g_{33}x_3y_3 + \\ + g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + g_{23}(x_2y_3 + x_3y_2). \quad (7)$$

Аналогичная формула справедлива и для базиса на плоскости.

$\Downarrow$Рассмотрим случай базиса в пространстве. Имеем
$\vec{x}\vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = (x_1\vec{e}_1)(y_1\vec{e}_1) + (x_1\vec{e}_1)(y_2\vec{e}_2) + (x_1\vec{e}_1)(y_3\vec{e}_3) + (x_2\vec{e}_2)(y_1\vec{e}_1) + (x_2\vec{e}_2)(y_2\vec{e}_2) + (x_2\vec{e}_2)(y_3\vec{e}_3) + (x_3\vec{e}_3)(y_1\vec{e}_1) + (x_3\vec{e}_3)(y_2\vec{e}_2) + (x_3\vec{e}_3)(y_3\vec{e}_3) = \vec{e}_1^{\,2}x_1y_1 + (\vec{e}_1\vec{e}_2)(x_1y_2 + x_2y_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3)(x_1y_3 + x_3y_1) + \vec{e}_2^{\,2}x_2y_2 + (\vec{e}_2\vec{e}_3)(x_2y_3 + x_3y_2) + \vec{e}_3^{\,2}x_3y_3 = g_{11}x_1y_1 + g_{22}x_2y_2 + g_{33}x_3y_3 + g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + g_{23}(x_2y_3 + x_3y_2)$,
что и требуется доказать.
Доказательство в случае базиса на плоскости проводится совершенно аналогично.$\Uparrow$

Многочлен $b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + b_{33}x_3y_3 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{13}x_1y_3 + b_{31}x_3y_1 + b_{23}x_2y_3 + b_{32}x_3y_2$ от переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ с коэффициентами b_{ij} называется *билинейной формой*. Таким образом, скалярное произведение вычисляется с помощью билинейной формы.

Из формулы (7) получается формула для скалярного квадрата вектора $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ через его координаты в произвольном базисе:

$$\vec{x}^{\,2} = g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3. \qquad (8)$$

Аналогичная формула справедлива и для базиса на плоскости.
Многочлен $k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + k_{33}x_3^2 + 2k_{12}x_1x_2 + 2k_{13}x_1x_3 + 2k_{23}x_2x_3$ от переменных x_1, x_2, x_3 с коэффициентами k_{ij} называется *квадратичной формой*.

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — ортонормированный базис в пространстве и $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$.

Формула для вычисления скалярного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе в пространстве

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{9}$$

$\Downarrow$Матрица Грама ортонормированного базиса является единичной: $g_{jj} = \vec{e}_j^{\,2} = 1$ $(j = 1, 2, 3)$, $g_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j = \vec{e}_j\vec{e}_i = 0$ для всех $1 \leq i < j \leq 3$. Согласно формуле (7) имеем $\vec{x}\vec{y} = g_{11}x_1y_1 + g_{22}x_2y_2 + g_{33}x_3y_3 +$ $+ g_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + g_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + g_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

В случае базиса на плоскости получается совершенно аналогичная формула.

Вычисления с помощью скалярного произведения

Возможность вычислить скалярное произведение через координаты векторов позволяет для данных ненулевых векторов по их координатам вычислить их длины и орты, найти косинус угла между ними, в частности, определить, будут ли они перпендикулярны, острый или тупой угол между ними, найти проекцию и компоненту одного вектора на другой:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}};\\
\vec{e}_{\vec{a}} &= \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a};\\
\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|};\\
\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|};\\
\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{a}}\vec{b} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}.
\end{aligned}
$$

Пример вычислений при помощи скалярного произведения в произвольном базисе

Пусть в пространстве задан базис $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, причем $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 4$, $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) = (\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) = \dfrac{\pi}{3}$ и известны координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в этом базисе: $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Требуется найти $|\vec{a}|$, $\vec{e}_{\vec{a}}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, определить, какой угол - острый, тупой или прямой - между ними, найти проекцию и компоненту вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Для решения нужно найти матрицу Грама базиса B. Имеем $g_{11} = \vec{e}_1^{\,2} = 1$, $g_{22} = \vec{e}_2^{\,2} = 4$, $g_{33} = \vec{e}_3^{\,2} = 16$, $g_{12} = \vec{e}_1\vec{e}_2 = 1$, $g_{13} = \vec{e}_1\vec{e}_3 = 2$, $g_{23} = \vec{e}_2\vec{e}_3 = 4$.
Вычисляем $\vec{a}^2$ по формуле (8):
$\vec{a}^2 = g_{11} + 4g_{22} + 16g_{33} - 4g_{12} + 6g_{13} - 12g_{23} = 1 + 16 + 144 - 4 + 12 - 48 = 121.$
Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = 11$ и орт вектора $\vec{a}$ – вектор $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{11}\vec{a}$.
Вычисляем скалярное произведение по формуле (7):
$\vec{a}\vec{b} = 2g_{11} - 2g_{22} - 3g_{33} - 3g_{12} + 5g_{13} + 5g_{23} = 2 - 8 - 48 - 3 + 10 + 20 = -27.$
Так как $\vec{a}\vec{b} < 0$, косинус угла между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ отрицательный и поэтому угол тупой. Чтобы вычислить этот косинус, найдем $|\vec{b}|$. Имеем
$\vec{b}^2 = 4g_{11} + g_{22} + g_{33} + 4g_{12} - 4g_{13} - 2g_{23} = 4 + 4 + 16 + 4 - 8 - 8 = 12.$
Следовательно, $|\vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\dfrac{27}{22\sqrt{3}} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{22}$.

Окончание решения примера

Отметим, что при нахождении косинуса угла не требуется приближенно вычислять угол в случае, когда это невозможно сделать точно.

Наконец, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\dfrac{27}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ и $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = -\dfrac{27}{12}\vec{b} = -\dfrac{9}{4}\vec{b}$.

Пример вычислений при помощи скалярного произведения в ортонормированном базисе

Пусть в пространстве задан ортонормированный базис $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и известны координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$ в этом базисе: $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Требуется найти $|\vec{a}|$, $\vec{e}_{\vec{a}}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, определить, какой угол - острый, тупой или прямой - между ними, найти проекцию и компоненту вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Вычисляем $\vec{a}^2 = 1 + 4 + 9 = 14$, $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ и $\vec{e}_{\vec{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\vec{a}$.

Аналогично $\vec{b}^2 = 4 + 1 + 1 = 6$, $|\vec{b}| = \sqrt{6}$ и $\vec{e}_{\vec{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{b}$.

Далее, вычисляем $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 2 - 3 = -3$.

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, косинус угла между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ отрицательный и поэтому угол тупой. Вычисляем косинус:

$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\dfrac{3}{\sqrt{14 \cdot 6}} = -\dfrac{3\sqrt{21}}{42}$. Напомним, что при нахождении косинуса угла не требуется приближенно вычислять угол в случае, когда это невозможно сделать точно.

Наконец, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = -\dfrac{3}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ и $\overrightarrow{\text{ком}}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} = -\dfrac{3}{6}\vec{b} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$.

Направляющие косинусы вектора

Зафиксируем ортонормированный базис $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$. Пусть $[\vec{a}]_B = (a_1, a_2, a_3)$. Обозначим через α, β, γ углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно. Вычислим косинусы этих углов. Имеем $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{a}||\vec{e}_1|} = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$ и аналогично $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$. Таким образом, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{1}{|\vec{a}|}(a_1, a_2, a_3)$, т.е. орт $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектора $\vec{a}$ имеет координаты $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{10}$$

Определение

Направляющими косинусами вектора относительно ортонормированного базиса называются косинусы углов, образованных данным вектором с базисными векторами.

Приложения направляющих косинусов

Формула (10) предыдущего слайда показывает, что ненулевой вектор не может образовывать произвольные углы с векторами ортонормированного базиса. Так как любые числа a, b, c, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, являются координатами некоторого орта, получаем следующее

Предложение

Ненулевой вектор образует с векторами ортонормированного базиса углы α, β, γ тогда и только тогда, когда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Так как знак ненулевой координаты вектора определяется знаком соответствующего направляющего косинуса, получаем такое

Наблюдение

Пусть a_1, a_2, a_3 — координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{e}_i})$ острый, если $a_i > 0$, прямой, если $a_i = 0$, тупой, если $a_i < 0$.

Лемма

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$. Если для любого вектора $\vec{x} \in V_g$ справедливо равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

$\Downarrow$Из равенства $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ получаем $\vec{a}\vec{x} - \vec{b}\vec{x} = 0$ и $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Полагая $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, получаем $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 0$, откуда следует $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. Таким образом, $\vec{a} = \vec{b}$.$\Uparrow$

Утверждение доказанной леммы называется *слабым законом сокращения для скалярного произведения*. Заметим, что обычный закон сокращения для скалярного произведения не выполняется: из $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ не следует $\vec{a} = \vec{b}$. Пример предлагается привести самостоятельно.

Определитель Грама

Определение

Определителем Грама базиса на плоскости или в пространстве называется определитель матрицы Грама этого базиса.

Предложение

Определитель Грама любого базиса на плоскости или в пространстве является положительным числом.

$\Downarrow$Докажем это для базиса на плоскости. Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ – базис на плоскости и $b_j = |\vec{b}_j|$, $\varphi = \widehat{(\vec{b}_1, \vec{b}_2)}$. Тогда $0 < \varphi < \pi$ и $g_{11} = \vec{b}_1^2 = b_1^2$, $g_{22} = \vec{b}_2^2 = b_2^2$, $g_{12} = \vec{b}_1\vec{b}_2 = b_1 b_2 \cos\varphi$. Значит, определитель Грама $|G_B|$ базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ есть $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = b_1^2 b_2^2 - (b_1 b_2 \cos\varphi)^2 = b_1^2 b_2^2 (1 - \cos^2\varphi) = b_1^2 b_2^2 \sin^2\varphi$. Так как $\sin\varphi \neq 0$, заключаем, что $|G_B| > 0$.$\Uparrow$

Обратите внимание, что площадь параллелограмма, построенного на изображениях векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, отложенных от одной точки, равна $\sqrt{|G_B|}$.

Утверждение об определителе Грама любого базиса в пространстве будет доказано в курсе линейной алгебры.

Скалярное произведение в физике

Кинетическая энергия частицы с массой m, двигающейся со скоростью $\vec{v}$ в пространстве, вычисляется по формуле $E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$. Так как $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, получаем первое приложение скалярного произведения в физике.

Кинетическая энергия

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Второе приложение:

Работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$