Тема 2: Линейные операции над векторами

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Направленные отрезки

Определение

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая – концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. Если $A = B$, то отрезок называется *нулевым*.

Ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ определяет *направление* на прямой (AB), проходящей через точки A и B; его можно определить как луч с началом в точке A, содержащий точку B. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, *определяют одно и то же направление* на этой прямой, если в пересечении лучей получается луч (т.е. "стрелки направлены в одну сторону"); в противном случае $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ определяют на этой прямой *противоположные* направления.

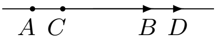

Рис. 1

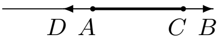

Рис. 2

Определения

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными*, если они ненулевые и либо лежат на одной прямой и определяют на ней одно и то же направление, либо лежат на параллельных прямых и точки B, D лежат по одну сторону от прямой (AC). Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *антинаправленными*, если они ненулевые и либо лежат на одной прямой и определяют на ней противоположные направления, либо лежат на параллельных прямых и точки B, D лежат по разные стороны от прямой (AC). Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

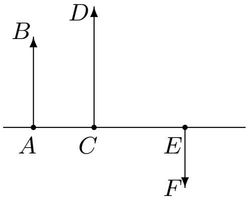

Рис. 3

Определение

Вектором называется множество всех нулевых направленных отрезков (*нулевой* вектор) и множество всех сонаправленных направленных отрезков одной и той же длины. Обозначение нулевого вектора: $\vec{0}$. Обозначение вектора: $\vec{a}$. Обозначение множества всех векторов: V_g. Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, принадлежащий вектору $\vec{a}$, называется *изображением* этого вектора.

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т.е. состоят из одних и тех же направленных отрезков. Допуская вольность речи, говорят, что два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Наблюдение

Для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственное изображение $\overrightarrow{AB}$ вектора $\vec{a}$, имеющее начало в точке A.

В школьном курсе геометрии вектор определяется как направленный отрезок, в то время как равенство векторов определяется как на сл.4. В связи с этим вместо точного обозначения $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ того факта, что вектор $\vec{a}$ определен своим изображением $\overrightarrow{AB}$, мы будем использовать привычное со школы обозначение $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Определение

Взятие изображения $\overrightarrow{AB}$ вектора $\vec{a}$ с началом в точке A будем называть *откладыванием вектора* $\vec{a}$ от точки A.

Определение

Два вектора называются *сонаправленными* (соотв. *антинаправленными*), если у них существуют сонаправленные (соотв. антинаправленные) изображения. Обозначения такие же, как для направленных отрезков.

Очевидно, что если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (соотв. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), то для любых $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} \in \vec{b}$ имеет место $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (соотв. $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Напомним, что через V_g обозначается множество всех векторов, изучаемых в аналитической геометрии.

Определение

Вектор $\vec{a}$ называется *коллинеарным* прямой ℓ, если существует изображение вектора $\vec{a}$, лежащее на прямой ℓ.

Обозначение: $\vec{a} \parallel \ell$. Для прямой ℓ через V_ℓ обозначим множество $\{\vec{x} \in V_g | \vec{x} \parallel \ell\}$. Очевидно, что $V_\ell = V_m \iff \ell = m$ или $\ell \parallel m$.

Определение

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая ℓ такая что $\vec{a}, \vec{b} \in V_\ell$. Обозначение: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Предложение

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняется одно (и только одно) из следующих условий: $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

$\Downarrow$Достаточно отложить векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от одной точки.$\Uparrow$

Ось вектора

Определение

Прямая, проходящая через точку A, от которой отложен вектор $\vec{a}$, коллинеарный этой прямой, называется *осью* вектора $\vec{a}$. Изображение вектора $\vec{a}$ на этой прямой задает *направление* оси.

Компланарные векторы

Определение

Вектор $\vec{a}$ называется *компланарным* плоскости π, если существует изображение вектора $\vec{a}$, лежащее на плоскости π.

Обозначение: $\vec{a} \parallel \pi$. Для плоскости π через V_π обозначим множество $\{\vec{x} \in V_g | \vec{x} \parallel \pi\}$. Очевидно, что $V_\pi = V_\rho \iff \pi = \rho$ или $\pi \parallel \rho$.

Определение

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существует плоскость π такая что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_\pi$.

Легко понять, что три вектора будут компланарны тогда и только тогда, когда их изображения, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости.

Очевидно также, что если два из трех данных векторов коллинеарны, то эти три вектора компланарны.

Заметим, что определять понятие компланарности для двух векторов не имеет смысла, так как для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ существует плоскость π такая что $\vec{a}, \vec{b} \in V_\pi$.

Правило треугольника

Суммой вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый через $\vec{a}+\vec{b}$ и полученный следующим образом: от произвольной точки A откладываем вектор $\vec{a}$, получаем изображение $\overrightarrow{AB}$. Затем от точки B откладываем вектор $\vec{b}$, получаем изображение $\overrightarrow{BC}$. Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ определяется изображением $\overrightarrow{AC}$.

Это определение нуждается в проверке корректности: выбор точки A не должен влиять на результат. Рассмотрим одну из возможных ситуаций, изображенную на рис. 4. Докажем, что $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ – изображения одного и того же вектора. Для этого достаточно убедиться, что AA_1C_1C – параллелограмм. Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b} = \overrightarrow{B_1C_1}$, параллелограммами будут AA_1B_1B и BB_1C_1C. Поэтому $AA_1 \| BB_1$, $|AA_1| = |BB_1|$ и $CC_1 \| BB_1$, $|CC_1| = |BB_1|$, откуда $AA_1 \| CC_1$ и $|AA_1| = |CC_1|$. Следовательно, AA_1C_1C – параллелограмм, что и требуется. Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

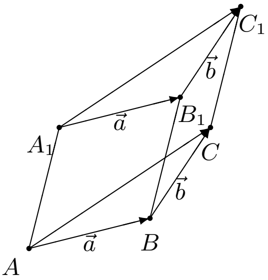

Рис. 4

Из школьного курса геометрии известны свойства сложения, которые можно сформулировать следующим образом.

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ справедливы равенства

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ($\vec{0}$ – нулевой вектор);
4. $\forall \vec{a}\ \exists \vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ($\vec{b} = -\vec{a}$ — противоположный к $\vec{a}$ вектор).

Для неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ свойство 1 может быть обосновано по следующему правилу сложения векторов.

Правило параллелограмма

Чтобы построить изображение вектора $\vec{a} + \vec{b}$, следует отложить от любой точки A векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получив изображения $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, затем построить на этих изображениях параллелограмм $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{AC}$ будет изображением вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис.5 на сл.11).

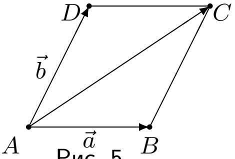

Рис. 5

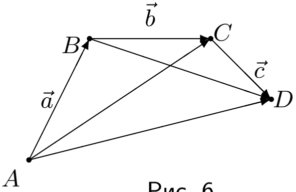

Рис. 6

Свойство 2 иллюстрируется рис. 6. Откладываем от точки A вектор $\vec{a}$, получаем точку B. От точки B отложим вектор $\vec{b}$, получим точку C. От точки C отложим вектор $\vec{c}$, получим точку D. Тогда $\overrightarrow{AC}$ – изображение вектора $\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}$ – изображение вектора $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. С другой стороны, $\overrightarrow{BD}$ – изображение вектора $\vec{b}+\vec{c}$ и $\overrightarrow{AD}$ – изображение вектора $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Таким образом, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Этот же рисунок иллюстрирует следующее правило сложения нескольких векторов.

Правило многоугольника

Чтобы сложить несколько векторов $\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_m$, следует отложить от точки A_0 вектор $\vec{c}_1$, от конца A_1 его изображения отложить вектор $\vec{c}_2$, от конца A_2 этого изображения отложить вектор $\vec{c}_3$ и так далее, от конца очередного изображения отложить следующий вектор, пока не получим точку A_m – конец изображения $\vec{c}_m$. Тогда $\overrightarrow{A_0A_m}$ – изображение суммы $\sum_{j=1}^{m}\vec{c}_j$.

Свойства сложения (2)

Свойство 3 теоремы сл.10 очевидно. Свойство 4 следует из того, для вектора $\vec{a}$ с изображением $\overrightarrow{AB}$ вектор $\vec{b}$ с изображением $\overrightarrow{BA}$ при сложении по правилу треугольника с вектором $\vec{a}$ дает вектор $\vec{0}$.

Скажем, что непустое множество векторов V *замкнуто относительно сложения*, если для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V$ имеет место $\vec{x} + \vec{y} \in V$. Очевидно следующее

Наблюдение

Множества V_ℓ для любой прямой ℓ и V_π для любой плоскости π замкнуты относительно сложения.

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $t \in \mathbb{R}$ называется вектор $\vec{b}$, определенный следующим образом: $|\vec{b}| = |t||\vec{a}|$ и если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $t \neq 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ при $t > 0$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ при $t < 0$. Обозначение: $\vec{b} = t\vec{a}$.

Из школьного курса геометрии известно следующее

Предложение

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ и любых чисел $s, t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие равенства:

1. $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$;
2. $(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$;
3. $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$;
4. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Определение

Вектор $\vec{e}$ называется *ортом*, если $|\vec{e}| = 1$. Для любого вектора $\vec{v} \neq \vec{0}$ вектор $\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ является ортом, сонаправленным с вектором $\vec{v}$.

Теорема сл.10 и предложение сл.13 содержат основные свойства линейных операций над векторами. Эти свойства точно такие же, как свойства линейных операций над матрицами (сл.8 т.1). В курсе линейной алгебры эти свойства послужат основой для определения линейного пространства, а множества всех векторов V_g, V_ℓ для любой прямой ℓ и V_π для любой плоскости π, также как множество всех матриц фиксированных размеров с действительными элементами доставят важные примеры линейных пространств.

Скажем, что непустое множество векторов V *замкнуто относительно умножения на скаляры*, если для любых $\vec{x} \in V$ и $t \in \mathbb{R}$ имеет место $t\vec{x} \in V$. Очевидно следующее

Наблюдение

Множества V_ℓ для любой прямой ℓ и V_π для любой плоскости π замкнуты относительно умножения на скаляры.

Наблюдение сл.12 вместе с этим наблюдением позволяют сказать, что

Множества V_ℓ для любой прямой ℓ и V_π для любой плоскости π замкнуты относительно линейных операций над векторами.

Предложение

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует $t \in \mathbb{R}$: $\vec{b} = t\vec{a}$.

$\Downarrow$ Если $\vec{b} = \vec{0}$, то положим $t = 0$. Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то положим $t = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то положим $t = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. В силу предложения слайда 7 получаем требуемое.$\Uparrow$

Следствие

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует $t \in \mathbb{R}$: $\vec{b} = t\vec{a}$ или $\vec{a} = t\vec{b}$.

Определение

Базисом на прямой ℓ называется любой ненулевой вектор из V_ℓ.

Пусть $\vec{e}$ – базис на прямой ℓ. Для любого $\vec{v} \in V_\ell$ существует $t \in \mathbb{R}$: $\vec{v} = t\vec{e}$. Очевидно, t определяется единственным образом по вектору v. Это число называется *координатой* вектора v в базисе $\vec{e}$ и обозначается через $[\vec{v}]_{\vec{e}}$.

Свойства координат. Критерий неколлинеарности векторов

Очевидны следующие свойства координат:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_\ell \ \forall p \in \mathbb{R} \ [\vec{u} + \vec{v}]_{\vec{e}} = [\vec{u}]_{\vec{e}} + [\vec{v}]_{\vec{e}}, \ \ [p\vec{v}]_{\vec{e}} = p[\vec{v}]_{\vec{e}}. \tag{1}$$

Предложение

Векторы $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ неколлинеарны тогда и только тогда, когда для любых чисел s, t из $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$ следует, что $s = t = 0$.

$\Downarrow$ В силу предложения сл.15 если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} = t\vec{b}$ или $\vec{b} = t\vec{a}$. Если $\vec{a} = t\vec{b}$, то $(-1)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$. Если $\vec{b} = t\vec{a}$, то $t\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$. При этом условие, указанное в предложении для чисел s, t, не выполняется. Поэтому из справедливости последнего условия вытекает, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарны. Обратно, предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарны. Если $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$ и $s \neq 0$, то, умножая обе части последнего равенства на s^{-1}, получим $\vec{a} + (s^{-1}t)\vec{b} = \vec{0}$, откуда $\vec{a} = (-s^{-1}t)\vec{b}$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$ по предложению сл.15, что исключено предположением. Следовательно, $s = 0$. Аналогично доказывается, что $t = 0$.$\Uparrow$

Определение

Базисом на плоскости π называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов из V_π.

Предложение

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базис на плоскости π. Для любого вектора $\vec{v} \in V_\pi$ существуют однозначно определенные числа $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такие что $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2$. Они называются *координатами* вектора v в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$\Downarrow$ Докажем существование. Очевидно, что $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ и $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$. Пусть $\vec{v} \in V_\pi$. Если $\vec{v} \parallel \vec{e}_j$, то в силу предложения сл.15 $\vec{v} = t_j\vec{e}_j$ $(j = 1, 2)$, и другой коэффициент можно взять равным 0. Пусть $\vec{v} \nparallel \vec{e}_j$ $(j = 1, 2)$. Отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}$ от одной точки O и проведем через конец изображения $\vec{v}$ прямые, коллинеарные векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до пересечения с осью соответствующего вектора (рис.7). Тогда по правилу параллелограмма $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{OC}$. Так как $\vec{x} \parallel \vec{e_1}$, $\vec{y} \parallel \vec{e_2}$, согласно предложению сл.15 получаем $\vec{x} = t_1\vec{e_1}$, $\vec{y} = t_2\vec{e_2}$, откуда $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2$. Существование чисел t_1, t_2 доказано.

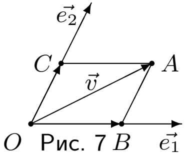

Рис. 7

Предположим, что $\vec{v} = s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Вычитая это равенство из равенства $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2$, получаем $(t_1 - s_1)\vec{e}_1 + (t_2 - s_2)\vec{e}_2 = \vec{0}$. Так как векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ неколлинеарны, согласно предложению сл.16 $t_1 - s_1 = 0$ и $t_2 - s_2 = 0$. Следовательно, $t_1 = s_1$ и $t_2 = s_2$.$\Uparrow$

Координаты вектора $\vec{v}$ в базисе $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ на плоскости π обозначим через $[\vec{v}]_B = (t_1, t_2)$. Свойства координат, выражаемые равенствами (1) сл.15 (с учетом того, что координаты — матрицы размеров 1×2), сохраняются и легко проверяются.

Следствие

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них выражается с помощью линейных операций через остальные.

$\Downarrow$Если один из векторов выражается через остальные, скажем, $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$, то очевидно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Предположим, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны, то один из них можно выразить через другой в силу следствия сл.15 и прибавить вектор $\vec{c}$ с коэффициентом 0. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарны, то они образуют базис на плоскости, которой компланарны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и требуемое обеспечивается предложением сл.17.$\Uparrow$

Предложение

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_g$ некомпланарны тогда и только тогда, когда для любых чисел s, t, r из $s\vec{a} + t\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ следует, что $s = t = r = 0$.

$\Downarrow$ Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны и $s\vec{a} + t\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$. Предположим, что $s \neq 0$. Умножив обе части последнего равенства на s^{-1}, получим $\vec{a} + (s^{-1}t)\vec{b} + (s^{-1}r)\vec{c} = \vec{0}$, откуда $\vec{a} = (-s^{-1}t)\vec{b} + (-s^{-1}r)\vec{c}$ и по следствию сл.18 векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, что исключено предположением. Следовательно, $s = 0$. Аналогично доказывается, что $t = 0$ и $r = 0$. Обратно, предположим, что для любых чисел s, t, r из $s\vec{a} + t\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ следует, что $s = t = r = 0$. Это условие не может выполняться, если один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно выражается через два оставшихся. В силу следствия сл.18 заключаем, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны.$\Uparrow$

Определение

Базисом в пространстве V_g называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Предложение

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис в пространстве V_g. Для любого вектора $\vec{v} \in V_g$ существуют однозначно определенные числа $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ такие что $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3$. Они называются *координатами* вектора v в базисе B.

$\Downarrow$Докажем существование. Очевидно, что $\vec{e}_i \not\parallel \vec{e}_j$ при $i \neq j$. Пусть $\vec{v} \in V_g$.

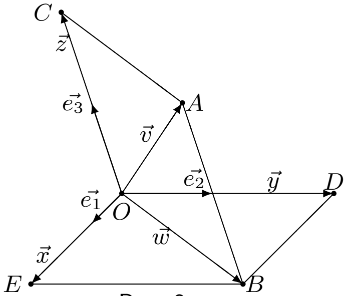

Рис. 8

Отложим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{v}$ от одной точки O. Если $\vec{v}$ компланарен векторам $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ для некоторых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, то требуемое вытекает из предложения сл.16. Предположим, что $\vec{v}$ некомпланарен векторам $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Проведем через точку A (конец изображения $\overrightarrow{OA}$ вектора $\vec{v}$) отрезок коллинеарно вектору $\vec{e}_3$ до пересечения с плоскостью, проходящей через точку O компланарно векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Обозначим точку пересечения через B. Вектор $\vec{w}$ определяется направленным отрезком $\overrightarrow{OB}$. Проведем через точку A отрезок коллинеарно вектору $\vec{w}$ до пересечения с осью вектора $\vec{e}_3$, проходящей через точку O. Получаем точку C и вектор $\vec{z}$ с изображением $\overrightarrow{OC}$. По правилу параллелограмма $\vec{v} = \vec{w} + \vec{z}$. Разлагая вектор $\vec{w}$ по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в плоскости, проходящей через точку O компланарно векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, получаем $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$, и $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$. В силу предложения сл.15 имеем $\vec{x} = t_1\vec{e}_1$, $\vec{y} = t_2\vec{e}_2$, $\vec{z} = t_3\vec{e}_3$, и $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3$. Существование чисел t_1, t_2, t_3 доказано.

Установим их единственность. Пусть $\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3$ и $\vec{v} = s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + s_3\vec{e}_3$ для некоторых $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $(t_1 - s_1)\vec{e}_1 + (t_2 - s_2)\vec{e}_2 + (t_3 - s_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$. Так как векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ некомпланарны, по предложению сл.19 имеем $t_1 - s_1 = 0$, $t_2 - s_2 = 0$ и $t_3 - s_3 = 0$. Следовательно, $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$.$\Uparrow$

Координаты вектора в базисе в пространстве

Пусть $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис в пространстве V_g. Строку координат вектора $\vec{v}$ в базисе B будем обозначать через $[v]_B$.

Свойства координат, выражаемые равенствами (1) сл.15, сохраняются и легко проверяются. Запишем *разложение вектора по базису*:
$\vec{v} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3$.
Из следствия сл.15 и свойств координат, упомянутых выше, получается

Критерий коллинеарности векторов по координатам

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты в одном и том же базисе пропорциональны.

Это означает, что если $[\vec{a}]_B = (a_1, a_2, a_3)$ и $[\vec{b}]_B = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Аналогичные утверждения имеют место для векторов на плоскости.

Определение

Углом между двумя ненулевыми векторами называется наименьший из двух углов, который образуют изображения этих векторов, отложенные от одной точки. Если один или оба вектора нулевые, то угол между ними не определен.

Очевидно, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора точки, от которой откладываются векторы. Ясно также, что угол между векторами заключен в промежутке $[0, \pi]$ и угол между сонаправленными векторами равен 0, а угол между антинаправленными векторами равен π.

Угол между векторами $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ будем обозначать через $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.
Будем говорить, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ перпендикулярны и писать $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$.

Ортонормированный базис

Определение

Базис на прямой, на плоскости или в пространстве называется *ортонормированным*, если в нем длина каждого вектора равна 1 и любые два различных вектора перпендикулярны.

Очевидно, что на прямой ортонормированный базис представляет собой орт, коллинеарный данной прямой. Следовательно, на прямой имеется всего два ортонормированных базиса.
На плоскости и в пространстве существует бесконечное множество ортонормированных базисов.

Систему координат можно определить на прямой, на плоскости или в пространстве.

Определение

Системой координат называется совокупность из точки O (называемой *началом координат* и базиса B (на прямой, на плоскости или в пространстве). Обозначение: $(O; B)$.

Такая система координат называется *произвольной декартовой* или *аффинной*. Если в системе координат используется ортонормированный базис, то она называется *прямоугольной декартовой системой координат*.

Пусть M – произвольная точка на прямой, на плоскости или в пространстве. *Радиус-вектором* точки M в системе координат $(O; B)$ называется вектор, определяемый изображением $\overrightarrow{OM}$. Будем обозначать его через $\vec{r}_M$. *Координатами* точки M относительно системы координат $(O; B)$ называются координаты радиус-вектора $\vec{r}_M$ в базисе B.

На прямой точка имеет одну координату, на плоскости – две и в пространстве – три.

Если точка M имеет координаты (x_M, y_M, z_M) в аффинной системе координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в пространстве, то будем это обозначать так: $M(x_M, y_M, z_M)$. Таким образом, $\vec{r}_M = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2 + z_M\vec{e}_3$. Аналогичные обозначения используются для систем координат на плоскости.

Предложение

Пусть в произвольной декартовой системе координат даны точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Тогда вектор $\vec{v}$, определяемый изображением $\overrightarrow{AB}$, имеет координаты $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Это следует из равенства $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{v}$.

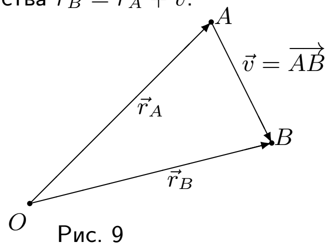

Рис. 9

Определение

Пусть A и B - различные точки. Говорят, что точка C *делит направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *в отношении* t $(t \neq -1)$, если $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}$.

Предложение

Если в произвольной декартовой системе координат даны координаты различных точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ и дано число t $(t \neq -1)$, а точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении t, то ее координаты $x_C = \dfrac{x_A + tx_B}{1+t}$, $y_C = \dfrac{y_A + ty_B}{1+t}$, $z_C = \dfrac{z_A + tz_B}{1+t}$.

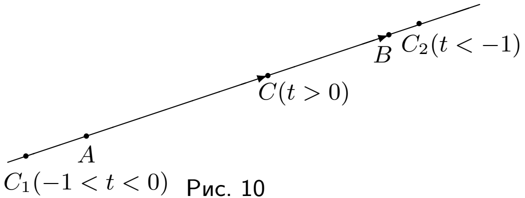

Рис. 10

$\Downarrow$ Из равенства $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}$ получаем $x_C - x_A = t(x_B - x_C)$, $y_C - y_A = t(y_B - y_C)$, $z_C - z_A = t(z_B - z_C)$, откуда следует требуемое. $\Uparrow$

Точка C может быть любой точкой на прямой (A, B), кроме точки B.

Координаты середины отрезка

При $t = 1$ имеем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, т.е. точка C – середина отрезка AB. Следовательно, получаем такие формулы.

Координаты середины отрезка

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Заметим, что на плоскости формулы для деления направленного отрезка в данном отношении и координат середины отрезка получаются из установленных выше формул отбрасыванием третьей координаты.

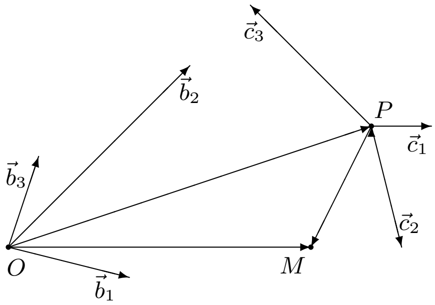

Рис. 11

Пусть в пространстве заданы две системы координат $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ и $(P;\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3)$. Выясним, как связаны между собой координаты точки M в этих системах координат. Для этого предположим, что известны координаты векторов $\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3$ базиса C в базисе $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$:

$$\vec{c}_j = t_{1j}\vec{b}_1 + t_{2j}\vec{b}_2 + t_{3j}\vec{b}_3 (j = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Матрица $T=(t_{ij})_{3\times 3}$ называется *матрицей перехода* от базиса B к базису C. Пусть (x_M,y_M,z_M) и (x'_M,y'_M,z'_M) – координаты точки M в системах $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ и $(P;\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3)$ соответственно и (x_P,y_P,z_P) – известные координаты точки P в системе $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$.

Так как $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ (см. рис.11 на сл.29), имеем в силу (2)
$x_M\vec{b}_1 + y_M\vec{b}_2 + z_M\vec{b}_3 = x_P\vec{b}_1 + y_P\vec{b}_2 + z_P\vec{b}_3 + x'_M\vec{c}_1 + y'_M\vec{c}_2 + z'_M\vec{c}_3 =$
$x_P\vec{b}_1 + y_P\vec{b}_2 + z_P\vec{b}_3 + x'_M(t_{11}\vec{b}_1 + t_{21}\vec{b}_2 + t_{31}\vec{b}_3) + y'_M(t_{12}\vec{b}_1 + t_{22}\vec{b}_2 + t_{32}\vec{b}_3) +$
$z'_M(t_{13}\vec{b}_1 + t_{23}\vec{b}_2 + t_{33}\vec{b}_3) = (x_P + t_{11}x'_M + t_{12}y'_M + t_{13}z'_M)\vec{b}_1 + (y_P +$
$t_{21}x'_M + t_{22}y'_M + t_{23}z'_M)\vec{b}_2 + (z_P + t_{31}x'_M + t_{32}y'_M + t_{33}z'_M)\vec{b}_3$, т.е.
$x_M\vec{b}_1 + y_M\vec{b}_2 + z_M\vec{b}_3 = (x_P + t_{11}x'_M + t_{12}y'_M + t_{13}z'_M)\vec{b}_1 + (y_P + t_{21}x'_M +$
$t_{22}y'_M + t_{23}z'_M)\vec{b}_2 + (z_P + t_{31}x'_M + t_{32}y'_M + t_{33}z'_M)\vec{b}_3$. В силу
единственности координат получаем

Формулы преобразования координат в пространстве

$$x_M = x_P + t_{11}x'_M + t_{12}y'_M + t_{13}z'_M;$$
$$y_M = y_P + t_{21}x'_M + t_{22}y'_M + t_{23}z'_M;$$
$$z_M = z_P + t_{31}x'_M + t_{32}y'_M + t_{33}z'_M.$$

Аналогичным образом выводятся формулы преобразования координат на плоскости. Если на плоскости заданы две системы координат $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ и $(P;\vec{c}_1,\vec{c}_2)$, причем

$$\vec{c}_j = t_{1j}\vec{b}_1 + t_{2j}\vec{b}_2 (j = 1, 2),$$

и (x_P, y_P) – координаты точки P в системе $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2)$, то координаты точки M (x_M, y_M) и (x'_M, y'_M) в системах $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ и $(P;\vec{c}_1,\vec{c}_2)$ связаны следующими формулами.

Формулы преобразования координат на плоскости

$$x_M = x_P + t_{11}x'_M + t_{12}y'_M;$$
$$y_M = y_P + t_{21}x'_M + t_{22}y'_M.$$

Выведем формулы преобразования координат при повороте прямоугольной декартовой системы на плоскости как твердого тела вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки. Система координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ поворачивается на угол φ вокруг точки O и получается система координат $(O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ (рис.12). Разлагая векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$,

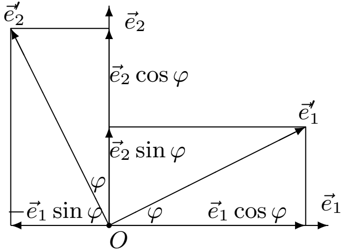

Рис. 12

получаем $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi$, $\vec{e}_2{}' = -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi$. Следовательно, матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ к базису $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ имеет вид $T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Используя прежние обозначения для координат точки M, согласно формулам преобразования координат на плоскости получаем следующие

Формулы преобразования координат при повороте прямоугольной декартовой системы координат

$$x_M = x'_M \cos\varphi - y'_M \sin\varphi;$$
$$y_M = x'_M \sin\varphi + y'_M \cos\varphi.$$