Тема 11: Комплексные числа

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Определение

Множество F называется *полем*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall a, b \in F \exists! c \in F$ $(c = a + b$ – *сумма* a и $b)$;
2) $\forall a, b \in F \exists! d \in F$ $(d = a \cdot b$ – *произведение* a и $b)$;
3) $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$; *коммутативность сложения*
4) $\forall a, b \in F \quad a \cdot b = b \cdot a$;
5) $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c)$; *ассоциативность сложения*
6) $\forall a, b, c \in F \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
7) $\exists 0 \in F : \forall a \in F \quad a + 0 = a$; *нулевой элемент*
8) $\exists 1 \in F : \forall a \in F \quad (a \cdot 1 = a) \wedge (1 \neq 0)$; *единичный элемент*
9) $\forall a \in F \exists b \in F : a + b = 0$; *противоположный элемент*
10) $\forall a \in F (a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in F : a \cdot b = 1)$; *обратный элемент*
11) $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. *дистрибутивность*

Примерами полей являются множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно всех рациональных и всех действительных чисел относительно обычных операций сложения и умножения.

Определения

Элементы множества $\mathbb{C} = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ называются *комплексными числами*. *Суммой комплексных чисел* (a, b) и (c, d) называется число

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

произведением комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется число

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Теорема

Относительно только что определенных операций сложения и умножения множество $\mathbb{C}$ является полем.

$\Downarrow$Аксиомы 3)-6) и 11) проверяются непосредственно. Проверим 6). Имеем $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, bc + ad) \cdot (e, f) = ((ac - bd)e - (bc + ad)f, (ac - bd)f + (bc + ad)e) = (ace - bde - bcf - adf, acf - bdf + bce + ade)$ и $(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) = (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$, что и требуется доказать.

Окончание доказательства

Легко проверить, что нулевым элементом является пара $(0, 0)$, единицей — пара $(1, 0)$. Нетрудно убедиться, что противоположным к числу (a, b) является число $(-a, -b)$, обратным к числу (a, b) (при условии, что $(a, b) \neq (0, 0)$, т.е. $a^2 + b^2 > 0$) является число $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Таким образом, теорема доказана.$\Uparrow$

Алгебраическая форма комплексного числа

Числа вида $(a, 0)$ ведут себя относительно операций сложения и умножения как действительные числа:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0),$$

поэтому комплексное число $(a, 0)$ отождествляют с действительным числом a. Таким образом, выполняется включение $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Далее, умножение действительного числа на комплексное производится по правилу $a \cdot (b, c) = (a, 0) \cdot (b, c) = (ab, ac)$, т.е.

$$a \cdot (b, c) = (ab, ac).$$

Положим $i = (0, 1)$. Каждый элемент поля $\mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$.Легко проверить, что $i^2 = (-1, 0)$. Комплексное число (a, b) принято записывать в виде $a + bi$, причем $i^2 = -1$.

Определения

Алгебраической формой комплексного числа называется его запись в виде $a + bi$. Комплексное число i называется *мнимой единицей*. Действительное число a называется *действительной частью* числа $a + bi$, а действительное число b — *мнимой частью* числа $a + bi$.

Очевидно следующее

Наблюдение

Комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$, т.е. комплексные числа в алгебраической форме равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и мнимые части.

Заметим, что

$$(a+bi)+(c+di)=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Иными словами,

сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с «неизвестным» i, при умножении дополнительно учитывается, что $i^2=-1$.

Комплексное сопряжение (1)

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается через $\overline{x}$.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) x — действительное число тогда и только тогда, когда $\overline{x} = x$;
2) $x + \overline{x}$ — действительное число;
3) $x \cdot \overline{x}$ — действительное число; более того, $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, причем $x \cdot \overline{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
4) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
5) $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

$\Downarrow$Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 вытекают из того, что, как легко проверить, если $x = a + bi$, то $x + \overline{x} = 2a$ и $x \cdot \overline{x} = a^2 + b^2$. Свойства 4 и 5 проверяются простыми вычислениями.$\Uparrow$

Свойство 3 можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа вида $\frac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, имеем

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

Извлечение квадратного корня из комплексного числа, записанного в алгебраической форме

Как найти квадратный корень из комплексного числа, показывает следующее.

Предложение

Для любого комплексного числа $u \neq 0$ существуют два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.

$\Downarrow$Пусть $u = a + bi$, $z = x + yi$, где $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a, \\ 2xy & = & b. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая.

1. $b = 0$, т.е. $u = a \in \mathbb{R}$. Тогда из второго уравнения системы (1) следует $x = 0$ или $y = 0$. При $a > 0$ имеем $y = 0$ и $x^2 = a$, откуда $x = \pm\sqrt{a}$. Это обычное извлечение корня из положительного действительного числа. При $a < 0$ имеем $x = 0$ и $-y^2 = a$, откуда $y = \pm\sqrt{-a}$ и $z = \pm i\sqrt{-a}$. Так извлекается корень из отрицательного действительного числа.

2. $b \neq 0$. Тогда $x, y \neq 0$. Возведем обе части каждого из уравнений системы (1) в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, так как x, y – действительные числа. Прибавляя и вычитая к этому уравнению первое уравнение системы (1), получаем $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$. Следовательно,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Так как $xy = \dfrac{b}{2}$, по знаку x знак y определяется однозначно и мы получаем два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.$\Uparrow$

Для комплексного числа u обозначение $\sqrt{u}$ применяется для множества из всех решений уравнения $z^2 = u$.

Пример

Покажем на примере числа $z = 3 - 4i$, как найти $\sqrt{3-4i}$. Пусть $(x+yi)^2 = 3 - 4i$. Тогда $3 - 4i = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3, \\ 2xy & = & -4. \end{cases} \tag{2}$$

Подчеркнем, что нам необходимо найти действительные решения этой системы. Возведем обе части каждого из этих уравнений в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = 25 \quad \text{или} \quad (x^2+y^2)^2 = 25.$$

Получаем, что $x^2 + y^2 = 5$ (ясно, что случай $x^2 + y^2 = -5$ невозможен, поскольку x и y — действительные числа). Отсюда и из первого уравнения системы (2) имеем $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, откуда $x = \pm 2$ и $y = \pm 1$. Из второго уравнения системы (2) видно, что $xy < 0$. Поэтому мы получаем два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 1$. Итак, мы нашли $\sqrt{3-4i} = \{2 - i, -2 + i\}$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел (1)

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Комплексное число $a + bi$ будем изображать точкой плоскости с координатами (a, b). Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости (причем только одна) и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать комплексное число (причем только одно). Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа, а точки оси ординат и только они — числа вида bi, которые называются *чисто мнимыми*. Начало координат соответствует числу 0.

Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой M (см. рис. 1 на следующем слайде). Тогда длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OM называется *аргументом* числа z. У числа 0 аргумент не определен. Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а аргумент — через $\arg(z)$.

На следующем рисунке $r = |z|$ и $\varphi = \arg(z)$.

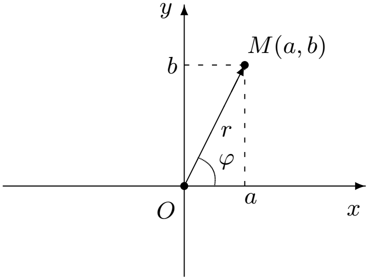

Рис. 1

Отметим, что для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса. Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, так как если φ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом k. Комплексное число $z = a + bi$ можно представить и вектором $\overrightarrow{OM}$. Тогда сумме чисел будет сопоставлена сумма соответствующих векторов, так как координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых.

Полярная система координат

Зафиксируем на плоскости точку O и луч Ox. Для любой точки M плоскости положим $r = \overrightarrow{OM}$ и $\varphi = \widehat{\overrightarrow{OM}, Ox}$ при $M \neq O$.

Определение

Пара чисел (r, φ) называется *полярными координатами* точки $M \neq O$. У точки O одна полярная координата $r = 0$.
Число r называется *полярным радиусом*, а число φ — *полярным углом* точки $M \neq O$.

У точки O имеется лишь полярный радиус $r = 0$.
Полярный угол определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
С полярной системой координат связывается прямоугольная декартова система координат с началом в точке O, у которой ось Ox направлена по полярному лучу (см. рис. 1). Если точка M изображает комплексное число $a + bi \neq 0$, то ее декартовы координаты суть (a, b), а полярные координаты суть (r, φ) — модуль и аргумент комплексного числа $a + bi$.

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Определение

Если r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи* этого числа.

Определение

Если $z=x+iy$ – комплексное число, то по определению полагают $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ (здесь e – основание натуральных логарифмов). В частности, $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и тригонометрическую форму комплексного числа можно записать в виде $re^{i\varphi}$.

Пусть, например, $u = 1 + i$, $r = |u|$ и $\varphi = \arg(u)$. Тогда, очевидно, $r = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\varphi = \pi/4$. Следовательно, тригонометрической формой записи числа $1 + i$ будет $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)$.

Приведем еще один пример. Пусть $v = -1 + \sqrt{3}i$, $\rho = |v|$ и $\psi = \arg(v)$. Тогда $\rho = 2$, $\cos\psi = -1/2$ и $\sin\psi = \sqrt{3}/2$. Из двух последних равенств вытекает, что $\psi = 2\pi/3$. Следовательно, тригонометрической формой записи числа v будет $2\big(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\big)$.

Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. Пусть
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$ Мы видим, что:

модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов;
модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного — разности аргументов z_1 и z_2.

Свойство модуля суммы комплексных чисел

Формулы для произведения и частного комплексных чисел в тригонометрической форме полностью согласуются с представлением $z = re^{i\varphi}$:
$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2)(e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
$\dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}(e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2}) = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Предложение

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство
$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

$\Downarrow$При геометрическом представлении комплексных чисел векторами на плоскости сумма комплексных чисел $z_1 + z_2$ изображается вектором, равным сумме векторов, изображающих z_1 и z_2. Если сложить последние два вектора по правилу треугольников, то получится вектор, соответствующий их сумме $z_1 + z_2$. При этом длины векторов равны $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$.
Если векторы, изображающие z_1 и z_2, неколлинеарны, то по свойству треугольника $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.
Если эти векторы сонаправлены, то $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$,
если они антинаправлены, то $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.$\Uparrow$

Возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Используя результат о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме, по индукции докажем, что

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{3}$$

для любого натурального n. База индукции: $n = 1$. Утверждение очевидно. Шаг индукции. Пусть утверждение доказано при $n = k - 1$, т.е. $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k-1} = r^{k-1}(\cos(k-1)\varphi + i\sin(k-1)\varphi)$. Тогда $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k-1}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$ $(r^{k-1}(\cos(k-1)\varphi + i\sin(k-1)\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$ $r^{k-1+1}(\cos(k-1+1)\varphi + i\sin(k-1+1)\varphi) = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$.
Таким образом,

при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

При $r = 1$ из формулы (3) получается равенство, известное как *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула Муавра оказывается удобным средством для преобразования тригонометрических выражений. Продемонстрируем это на следующем примере: выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Будем исходить из равенства

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5,$$

которое получено из формулы Муавра при $k = 5$. Правую его часть преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi -$
$-10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi =$
$= (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) +$
$+(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i$. Следовательно,
$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$
$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$

Определение

Пусть n — натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа* z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.
Множество всех корней степени n из комплексного числа z обозначается через $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n существует ровно один корень n-й степени из z, равный нулю. Пусть теперь $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z \neq 0$. Корень степени n из z будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда, в силу формулы (3),

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — некоторое целое число. Поскольку q и r — положительные действительные числа, это означает, что q — арифметический корень степени n из числа r. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = (\varphi + 2\pi k)/n$. В частности, мы видим, что корень n-й степени из числа z всегда существует.

Извлечение корней из комплексных чисел (2)

Выясним, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Как мы видели, все корни n-й степени из числа z задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (4)$$

где k — целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} = \dfrac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\dfrac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда разность $k-\ell$ нацело делится на n. Таким образом, чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (4) взять n последовательных значений k, например, последовательно приравнивать k к $0, 1, \ldots, n-1$. Мы доказали, что существует ровно n различных значений корня степени n из произвольного ненулевого комплексного числа z, которые вычисляются по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (5)$$

При этом $\sqrt[n]{z} = \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$.

Рассмотрим пример: найти корни четвертой степени из числа $1+i$.
Модуль этого числа равен $\sqrt{2}$, аргумент равен $\pi/4$. Согласно формуле (5) имеем

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем четыре значения корня:

при $k = 0: \quad w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$

при $k = 1: \quad w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$

при $k = 2: \quad w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$

при $k = 3: \quad w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$

Определение

Корнем степени n из единицы называется комплексное число ε такое что $\varepsilon^n = 1$.

Положим $\varepsilon_{n,k} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$. Так как $1 = \cos 0 + i\sin 0$, имеем $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_{n,k} | k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ – множество всех корней n-й степени из 1.
На комплексной плоскости корни n-й степени из 1 расположены на окружности радиуса 1 с центром в точке 0 в вершинах правильного n-угольника, одна из вершин которого расположена в точке 1.
Легко видеть, что для любого ненулевого комплексного числа z и для любого $x \in \sqrt[n]{z}$ справедлива формула $\sqrt[n]{z} = x\sqrt[n]{1}$.

Определение

Комплексное число ε называется *первообразным корнем* степени n из единицы, если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^m \neq 1$ для всех $1 \leq m < n$.

Очевидно, что $\varepsilon_{n,1}$ – первообразный корень степени n из единицы, так как $\varepsilon_{n,k} = \varepsilon_{n,1}^k$ при $k = 1, \ldots, n-1$.

Критерий первообразности корня

Следующее утверждение позволяет выделить первообразные корни степени n среди элементов множества $\sqrt[n]{1}$.

Теорема

Число $\varepsilon_{n,k} = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(1 < k < n)$ является первообразным корнем степени n из единицы тогда и только тогда, когда числа k и n взаимно просты.

$\Downarrow$Пусть $\varepsilon_{n,k}$ является первообразным корнем степени n из единицы. От противного, предположим, что числа k и n не взаимно просты. Пусть $d = (n, k)$ – наибольший общий делитель, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$. Имеем по формуле Муавра $\varepsilon_{n,k}^{n_1} = \cos\dfrac{2\pi k n_1}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k n_1}{n} =$ $\cos\dfrac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k_1 d n_1}{n} = \cos 2\pi k_1 + i\sin 2\pi k_1 = 1$. Так как $n_1 < n$, получаем противоречие.

Предположим, что числа k и n взаимно просты и $\varepsilon_{n,k}^{m} = 1$. Тогда $\cos\dfrac{2\pi k m}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k m}{n} = 1$, откуда $\dfrac{2\pi k m}{n} = 2\pi q$ для некоторого целого числа q. Имеем $km = qn$, откуда в силу взаимной простоты k и n получаем, что n делит m. Следовательно, $\varepsilon_{n,k}^{r} \neq 1$ при $1 \leq r < n$ и $\varepsilon_{n,k}$ – первообразный корень степени n из единицы.$\Uparrow$