Тема 10: Квадрики в пространстве

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Определение

Алгебраическим уравнением второй степени с тремя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \tag{1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ отличен от нуля.

Определение

Квадрикой в пространстве называется геометрический образ алгебраического уравнения второй степени с тремя неизвестными относительно фиксированной аффинной системы координат.

Отметим без доказательства, что это определение корректно.

Нашей целью изучения квадрик является их полная классификация. Для ее осуществления требуется сначала изучить некоторые конкретные квадрики в пространстве.

Определение

Цилиндрической поверхностью называется множество всех точек всевозможных прямых, коллинеарных фиксированному вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$ и проходящих через все точки некоторой линии ℓ. Эта линия называется *направляющей*, а любая прямая, коллинеарная вектору $\vec{a}$ и лежащая на цилиндрической поверхности — *образующей* этой поверхности.

Из определения цилиндрической поверхности следует, что она имеет направляющую, лежащую в некоторой плоскости. В качестве такой направляющей можно взять пересечение цилиндрической поверхности с некоторой плоскостью, перпендикулярной к образующим этой поверхности.

Теорема

Для любой цилиндрической поверхности существует прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, относительно которой эта поверхность задается уравнением $F(x,y)=0$.

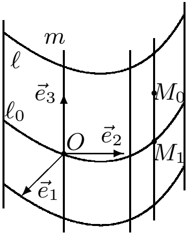

Рис. 1

$\Downarrow$Рассмотрим цилиндрическую поверхность с направляющей ℓ и образующей m (см. рис.1). Выберем на прямой m точку O и отложим от нее орт $\vec{e}_3$, коллинеарный m. Возьмем какой-нибудь орт $\vec{e}_1$, перпендикулярный $\vec{e}_3$, и положим $\vec{e}_2=[\vec{e}_3,\vec{e}_1]$. Тогда $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ — прямоугольная декартова система координат. Обозначим через ℓ_0 пересечение цилиндрической поверхности с плоскостью Oxy построенной системы координат. Пусть $F(x,y)=0$ — уравнение кривой ℓ_0 в системе координат $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ на плоскости Oxy. Покажем, что в системе координат $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ уравнение $F(x,y)=0$ определяет рассматриваемую цилиндрическую поверхность. Выберем на поверхности произвольную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Она лежит на некоторой образующей, которая пересекает линию ℓ_0 в точке $M_1(x_0,y_0,0)$. Следовательно, $F(x_0,y_0)=0$.

Окончание доказательства теоремы

Пусть теперь $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка пространства, для которой $F(x_0, y_0) = 0$. Опустим из точки M_0 перпендикуляр на плоскость Oxy. Его основание — точка $M_1(x_0, y_0, 0)$. Так как $F(x_0, y_0) = 0$, точка M_1 лежит на кривой ℓ_0. Следовательно, точка M_0 лежит на цилиндрической поверхности.$\Uparrow$

Из теоремы немедленно получается получается

Следствие

Если в уравнении поверхности в прямоугольной декартовой системе координат отсутствует какая-либо переменная, то это уравнение определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой в соответствующей координатной плоскости определяется уравнением поверхности, а образующие параллельны оси координат, отвечающей отсутствующему неизвестному.

Например, уравнение $F(x, z) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой в плоскости Oxz имеет уравнение $F(x, z) = 0$, а образующие параллельны оси Oy.

Определения

Цилиндром 2-го порядка называется цилиндрическая поверхность, у которой направляющая является квадрикой на плоскости, а образующие перпендикулярны этой плоскости.
Эллиптическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.
Гиперболическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.
Параболическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $y^2 = 2px$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.

Последние три типа цилиндров 2-го порядка изображены на рис.2-4 на следующем слайде.

Из теоремы о классификации квадрик на плоскости (сл.6 т.9) следует, что помимо трех перечисленных выше типов цилиндров 2-го порядка, к ним относятся пара пересекающихся плоскостей, пара параллельных плоскостей, плоскость, прямая и пустое множество.

Эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры

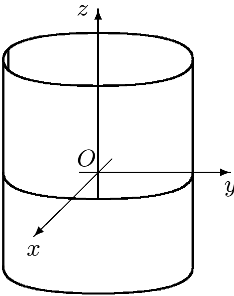

Рис.2. Эллиптический цилиндр

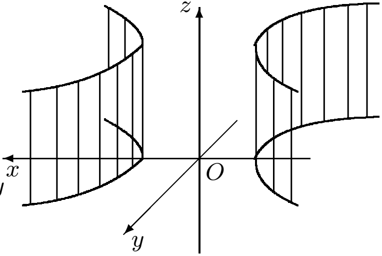

Рис.3. Гиперболический цилиндр

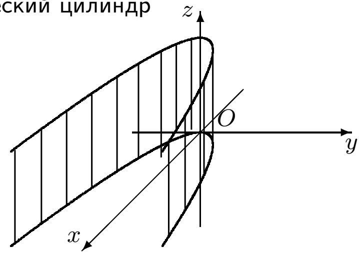

Рис.4. Параболический цилиндр

Определение

Конической поверхностью называется множество всех точек всевозможных прямых, проходящих через каждую точку фиксированной линии ℓ и фиксированную точку C, не лежащую на линии ℓ. При этом линия ℓ называется *направляющей*, а точка C — *вершиной* конической поверхности.

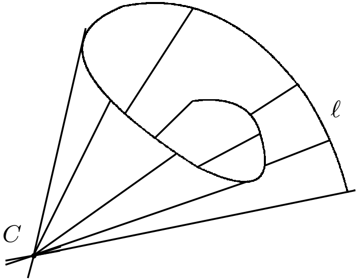

Рис. 5

Определение

Конусом 2-го порядка называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $(a, b, c > 0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема

Конус 2-го порядка является конической поверхностью с вершиной в начале координат и направляющей ℓ, заданной уравнениями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$.

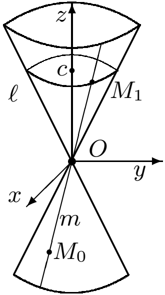

Рис. 6

$\Downarrow$Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \neq O$ лежит на конической поверхности. Тогда прямая m, проходящая через точки M_0 и O, пересекает направляющую ℓ в некоторой точке M_1 (см. рис.6). Параметрические уравнения прямой m имеют вид $x = x_0t$, $y = y_0t$, $z = z_0t$. Ясно, что $z_0 \neq 0$. Точка M_1 имеет координаты x_1, y_1, c. Следовательно, $z_0t = c$ и $t = \frac{c}{z_0}$, откуда $x_1 = \frac{cx_0}{z_0}$, $y_1 = \frac{cy_0}{z_0}$. Так как точка M_1 лежит на поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеет место равенство

$\dfrac{(cx_0)^2}{(z_0a)^2} + \dfrac{(cy_0)^2}{(z_0b)^2} = 1$. Отсюда следует $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$, т.е. точка M_0 лежит на конусе 2-го порядка.

Предположим, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \neq O$ лежит на конусе 2-го порядка. Тогда $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$. Ясно, что тогда $z_0 \neq 0$. Проведем через точки M_0 и O прямую m и покажем, что она пересекает линию ℓ. Параметрические уравнения прямой m имеют вид $x = x_0t$, $y = y_0t$, $z = z_0t$. Она пересекает плоскость $z = c$ в точке $M_1(x_1, y_1, c)$. Покажем, что $M_1 \in \ell$. Для этого убедимся, что $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$. Так как $z_0t = c$, имеем $t = \dfrac{c}{z_0}$ и $x_1 = \dfrac{cx_0}{z_0}$, $y_1 = \dfrac{cy_0}{z_0}$. Найдем $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = \dfrac{(cx_0)^2}{(z_0a)^2} + \dfrac{(cy_0)^2}{(z_0b)^2} = \left(\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\dfrac{c^2}{z_0^2} = 1$, поскольку $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$. Таким образом, точка M_1 лежит на линии ℓ.$\Uparrow$

Определение

Эллипсоидом называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму эллипсоида *методом сечений*. Это означает, что мы изучаем сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxy, Oxz, Oyz.
Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z=h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$ равносильной системе
$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$ При $|h|>c$ получается пустое множество, при $|h|=c$ — точки $(0,0,\pm c)$, называемые *вершинами* эллипсоида, при $|h|<c$ — эллипсы с полуосями $\dfrac{a\sqrt{c^2-h^2}}{|c|}$ и $\dfrac{b\sqrt{c^2-h^2}}{|c|}$.

Вид эллипсоида

Так как все переменные входят в уравнение эллипсоида симметрично, сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz устроены точно так же. Эллипсоид изображен на рис.7.

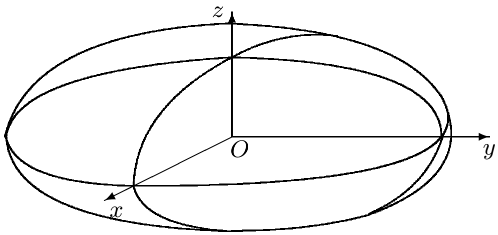

Рис. 7

Определение

Однополостным гиперболоидом называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму однополостного гиперболоида методом сечений. Рассмотрим его сечение плоскостью $z=h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$ равносильной системе $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$

Оно является эллипсом с полуосями $\dfrac{a\sqrt{h^2+c^2}}{|c|}$ и $\dfrac{b\sqrt{h^2+c^2}}{|c|}$. При $c=0$ получается *горловой эллипс* однополостного гиперболоида. При увеличении $|h|$ полуоси эллипса неограниченно возрастают.

Сечение плоскостью $x=h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2},\\ x=h.\end{cases}$ При $|h|<a$ получается гипербола с полуосями $\dfrac{b\sqrt{a^2-h^2}}{|a|}$, $\dfrac{c\sqrt{a^2-h^2}}{|a|}$.

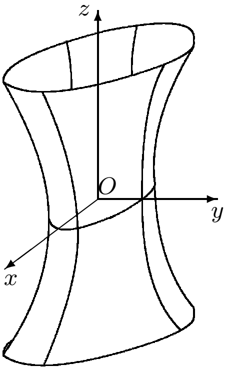

Рис. 8

При $|h| = a$ получается пара пересекающихся прямых, при $|h| > a$ — сопряженная гипербола с полуосями $\dfrac{b\sqrt{h^2 - a^2}}{|a|}$, $\dfrac{c\sqrt{h^2 - a^2}}{|a|}$. Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, имеет аналогичное строение.

Однополостный гиперболоид изображен на рис.8.

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ $(a, b, c > 0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму двуполостного гиперболоида методом сечений. Рассмотрим его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$ При $|h| < c$ получается пустое множество, при $|h| = c$ — точки $(0, 0, \pm c)$, называемые *вершинами* двуполостного гиперболоида, при $|h| > c$ — эллипсы с полуосями $\frac{a\sqrt{h^2 - c^2}}{|c|}$ и $\frac{b\sqrt{h^2 - c^2}}{|c|}$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса неограниченно возрастают. Сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$ и представляет собой сопряженную гиперболу.

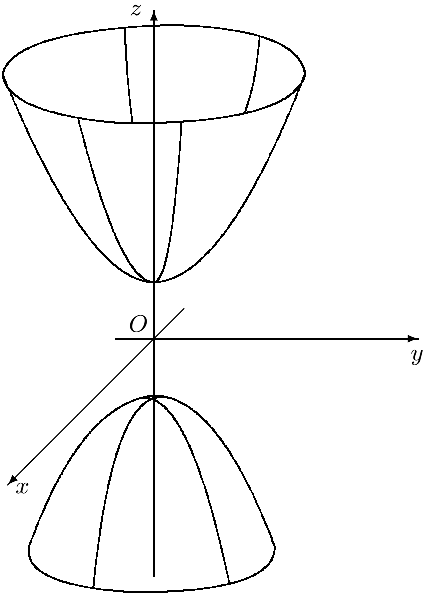

Рис. 9

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, имеет аналогичное строение. Двуполостный гиперболоид изображен на рис.9.

Определение

Эллиптическим параболоидом называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p,q>0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму эллиптического параболоида методом сечений. Его сечение плоскостью $z=h$, параллельной координатной плоскости Oxy, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h, \\ z=h. \end{cases}$ При $|h|<0$ получается пустое множество, при $|h|=0$ — точка $O(0,0,0)$, называемая *вершиной* эллиптического параболоида, при $|h|>c$ — эллипс с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$. При увеличении h полуоси эллипса неограниченно возрастают. Сечение плоскостью $x=h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{y^2}{q}=2z-\dfrac{h^2}{p}, \\ x=h, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} y^2=2q(z-\dfrac{h^2}{2p}), \\ x=h, \end{cases}$$

и представляет собой параболу.

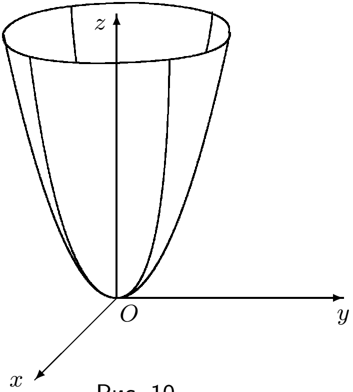

Рис. 10

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, имеет аналогичное строение.

Эллиптический параболоид изображен на рис.10.

Благодаря оптическому свойству параболы (сл.28 т.8) всевозможные отражатели света (предназначением от карманного фонарика до мощного прожектора) имеют форму эллиптического параболоида, обычно получаемого вращением дуги параболы вокруг оси симметрии.

Определение

Гиперболическим параболоидом называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p, q > 0)$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму гиперболического параболоида методом сечений. Его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$ При $|h| < 0$ получается сопряженная гипербола с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$, при $|h| = 0$ — пара пересекающихся прямых $y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$, $z = 0$ и при $|h| > 0$ — гипербола с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$. Эти сечения не дают хорошего представления о форме гиперболического параболоида.

Исследование формы гиперболического параболоида

Сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{y^2}{q} = \dfrac{h^2}{p} - 2z, \\ x = h, \end{cases}$ или

$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right), \\ x = h, \end{cases}$ и представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Вершина этой параболы находится в точке $M_h\left(h, 0, \dfrac{h^2}{2p}\right)$.

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} = 2z + \dfrac{h^2}{q}, \\ y = h, \end{cases}$ или

$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h, \end{cases}$ и представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. При $h = 0$ получаем параболу $x^2 = 2pz$, $y = 0$. Очевидно, что точка M_h лежит на этой параболе.

Исследование формы гиперболического параболоида (завершение)

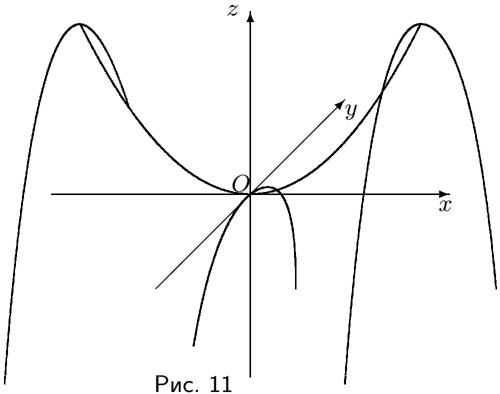

Рис. 11

Гиперболический параболоид можно представить себе как поверхность, полученную перемещением параболы $y^2 = -2qz$, ветви которой направлены вниз, расположенной в плоскости, параллельной координатной плоскости Oyz, так, что вершина этой параболы скользит по параболе $x^2 = 2pz$, расположенной в координатной плоскости Oxz, ветви которой направлены вверх.

Гиперболический параболоид изображен на рис.12 на следующем слайде.

Вид гиперболического параболоида

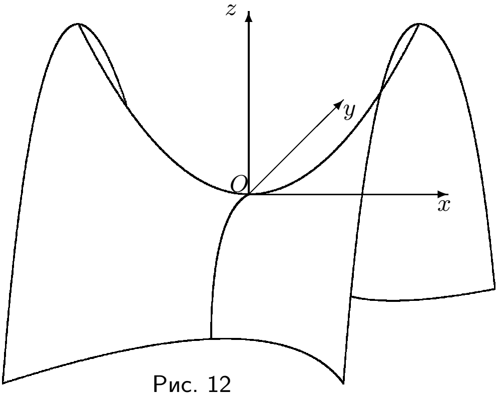

Рис. 12

Классификация квадрик в пространстве проводится по плану, аналогичному плану, реализованному для квадрик на плоскости в т.9. Сначала уравнение квадрики упрощается за счет выбора подходящей системы координат, а затем определяются геометрические образы полученных уравнений. Соответствующие утверждения приведены без доказательства. Уравнение квадрики сразу рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема

С помощью преобразования прямоугольной декартовой системы координат (преобразования ортонормированного базиса и параллельного переноса) общее уравнение квадрики в пространстве $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_4=0$ может приведено к одному из следующих видов:

1. $ax'^2+by'^2+cz'^2=d$, где $a, b, c \neq 0$;
2. $ax'^2+by'^2+cz'=0$, где $a, b, c \neq 0$ или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестных;
3. $ax'^2+by'^2=d$, где $a, b \neq 0$, или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестных;
4. $ax'^2+by'=0$, где $a, b \neq 0$, или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестных;
5. $ax'^2+d=0$, где $a \neq 0$, или уравнению, полученному из данного переименованием неизвестного.

Классификация квадрик в пространстве

Теорема

Любая квадрика в пространстве является одним из следующих множеств точек:

1. эллипсоид;
2. однополостный или двуполостный гиперболоид;
3. эллиптический или гиперболический параболоид;
4. конус 2-го порядка;
5. эллиптический, гиперболический или параболический цилиндр;
6. пара пересекающихся плоскостей;
7. пара параллельных плоскостей;
8. плоскость;
9. прямая;
10. точка;
11. пустое множество.

Определение

Прямая ℓ называется *прямолинейной образующей* квадрики α, если $\ell \subseteq \alpha$, т.е. все точки прямой лежат на квадрике.

Рассматривая квадрики в пространстве, не состоящие целиком из точек прямых, легко понять, что эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид не имеют прямолинейных образующих.
При изучении формы однополостного гиперболоида (сл.14) и гиперболического параболоида (сл.19) выяснилось, что некоторые сечения являются парами пересекающихся прямых. Оказывается, что это не случайно.

Теорема

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят точно две различные прямолинейные образующие.

$\Downarrow$Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на однополостном гиперболоиде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Возьмем ненулевой вектор $\vec{a} = (p, q, r)$ и потребуем, чтобы прямая $x = x_0 + pt$, $y = y_0 + qt$, $z = z_0 + rt$ лежала на гиперболоиде. Тогда $\dfrac{(x_0 + pt)^2}{a^2} + \dfrac{(y_0 + qt)^2}{b^2} - \dfrac{(z_0 + rt)^2}{c^2} = 1$ для любого действительного числа t. Далее,
$\dfrac{x_0^2 + 2x_0pt + (pt)^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2 + 2y_0qt + (qt)^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2 + 2z_0rt + (rt)^2}{c^2} = 1$ и
$\left(\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} - \dfrac{r^2}{c^2}\right) t^2 + 2\left(\dfrac{x_0p}{a^2} + \dfrac{y_0q}{b^2} - \dfrac{z_0r}{c^2}\right) t + \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1$ для любого действительного числа t. Отсюда $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1$,
$\dfrac{x_0p}{a^2} + \dfrac{y_0q}{b^2} - \dfrac{z_0r}{c^2} = 0$, $\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} - \dfrac{r^2}{c^2} = 0$. Из последнего уравнения следует, что $r \neq 0$, поэтому без ограничения общности $r = c$.

Тогда $\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1$ и $\dfrac{x_0p}{a^2}+\dfrac{y_0q}{b^2}=\dfrac{z_0}{c}$. Положим $x_1=x_0-p\dfrac{z_0}{c}$, $y_1=y_0-q\dfrac{z_0}{c}$. Тогда $\dfrac{px_1}{a^2}+\dfrac{qy_1}{b^2}=0$ и

$$1=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{(x_1+p\frac{z_0}{c})^2}{a^2}+\frac{(y_1+q\frac{z_0}{c})^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+2\left(\frac{px_1}{a^2}+\frac{qy_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c}+\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\right)\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2},$$ т.е. $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$.

Следовательно, точка $M_1(x_1,y_1,0)$ лежит на пересечении прямолинейной образующей и горлового эллипса однополостного гиперболоида. Поэтому x_1,y_1 одновременно не обращаются в нуль, и равенство $\dfrac{px_1}{a^2}+\dfrac{qy_1}{b^2}=0$ однозначно определяет пропорцию $\dfrac{p}{q}=\dfrac{-a^2y_1}{b^2x_1}$. Положим $p=-\dfrac{a}{b}y_1u$, $q=\dfrac{b}{a}x_1u$, где u — множитель пропорциональности. Так как $\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=\left(\dfrac{y_1^2}{b^2}+\dfrac{x_1^2}{a^2}\right)u^2$, заключаем, что $u^2=1$ и $u=\pm1$.

Из равенств $x_0 = x_1 + p\dfrac{z_0}{c} = x_1 - u\dfrac{a}{b}\dfrac{z_0}{c}y_1$ и $y_0 = y_1 + q\dfrac{z_0}{c} = y_1 + u\dfrac{b}{a}\dfrac{z_0}{c}x_1$ по формулам Крамера можно выразить x_1 и y_1 через x_0, y_0. Имеем
$\begin{cases} x_1 - u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c}y_1 = x_0, \\ u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c}x_1 + y_1 = y_0, \end{cases}$ $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c} \\ u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c} & 1 \end{vmatrix} = 1 + u^2\dfrac{z_0^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$,
$\triangle_1 = x_0 + u\dfrac{a}{b}\dfrac{z_0}{c}y_0$, $\triangle_2 = y_0 - u\dfrac{b}{a}\dfrac{z_0}{c}x_0$ и $x_1 = \dfrac{x_0 + u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c}y_0}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$,
$y_1 = \dfrac{y_0 - u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c}x_0}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$. Значит, через точку M_0 проходят точно две различные прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, имеющие направляющие векторы $\vec{a}_1 = (-\dfrac{a}{b}y_1, \dfrac{b}{a}x_1, c)$ и $\vec{a}_2 = (\dfrac{a}{b}y_1, -\dfrac{b}{a}x_1, c)$.$\Uparrow$

Теорема

Через каждую точку гиперболического параболоида проходят точно две различные прямолинейные образующие.

$\Downarrow$Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$. Возьмем ненулевой вектор $\vec{a} = (s, m, n)$ и потребуем, чтобы прямая $x = x_0 + st$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ лежала на параболоиде. Тогда $\frac{(x_0 + st)^2}{p} - \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt)$ для любого действительного числа t. Отсюда $\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0$, $\frac{x_0 s}{p} - \frac{y_0 m}{q} = n$, $\frac{s^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0$. Из последнего равенства следует $\frac{s}{\sqrt{p}} - \frac{m}{\sqrt{q}} = 0$ или $\frac{s}{\sqrt{p}} + \frac{m}{\sqrt{q}} = 0$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, числа s, m одновременно не обращаются в нуль. Поэтому можно взять $s_1 = \sqrt{p}$, $m_1 = \sqrt{q}$ или $s_2 = \sqrt{p}$, $m_2 = -\sqrt{q}$. Тогда $n_1 = \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}$, $n_2 = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}$. Таким образом, через точку M_0 проходят точно две различные прямолинейные образующие гиперболического параболоида, имеющие направляющие векторы $\vec{a}_1 = (s_1, m_1, n_1)$ и $\vec{a}_2 = (s_2, m_2, n_2)$.$\Uparrow$

Задача

Дан гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 2z$. Через его образующую $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0}$ и точку $(1, 1, 1)$ проведена плоскость π. Найти параметрические уравнения второй прямой линии пересечения параболоида с плоскостью π.

Решение. Запишем уравнение плоскости π по двум точкам и вектору (см. формулу (5) сл.8 т.6): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $\pi : -3x + 4y - z = 0$.

Найдем общие точки этой плоскости и параболоида. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0, \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 2z. \end{cases}$ Выразим z из уравнения плоскости $z = -3x + 4y = 12(-\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3})$, представим уравнение гиперболического параболоида в виде $\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3}\right) = 2z$ и подставим вместо z его выражение: $\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3}\right) = 24(-\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3})$.

Окончание решения примера

Так как $(-\frac{x}{4} + \frac{y}{3}) \neq 0$, после сокращения получаем $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -24$.
Следовательно, вторая прямая линия пересечения параболоида с плоскостью π имеет общие уравнения $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0, \\ 3x + 4y + 288 = 0. \end{cases}$ Выразив из этой системы x и y через z, получим $x = -48 - \frac{z}{6}$, $y = -36 + \frac{z}{8}$. Положив $z = 24t$, имеем $x = -48 - 4t$, $y = -36 + 3t$.
Ответ: параметрические уравнения второй прямой линии пересечения параболоида с плоскостью π $x = -48 - 4t$, $y = -36 + 3t$, $z = 24t$.

Задача

Найти острый угол между прямыми, по которым плоскость $\pi : 3x + 4y + 5z = 0$ пересекает конус $\alpha : x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$.

Решение. Пусть $\vec{n} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$ — нормальный орт плоскости π.

Положим $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{5}(-4, 3, 0)$ и $\vec{e}_2 = [\vec{n}, \vec{e}_1]$. Тогда $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3, -4, 5)$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ — правый ортонормированный базис, причем векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ компланарны плоскости π. Запишем параметрические уравнения плоскости π с начальной точкой $O(0, 0, 0)$ и направляющими векторами

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2\colon \begin{cases} x = -\dfrac{4}{5}u - \dfrac{3}{5\sqrt{2}}v, \\ y = \dfrac{3}{5}u - \dfrac{4}{5\sqrt{2}}v, \\ z = \dfrac{v}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Уравнение пересечения конуса и плоскости в плоскостных координатах: $\left(\dfrac{4}{5}u + \dfrac{3}{5\sqrt{2}}v\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}u - \dfrac{4}{5\sqrt{2}}v\right)^2 - v^2 = 0$ или

$u^2 - \dfrac{v^2}{2} = 0$. Получаются прямые $u\sqrt{2} \pm v = 0$. Их нормальные векторы $(\sqrt{2}, \pm 1)$ и угол между ними равен $\arccos \frac{1}{3}$.