Тема 1: Определители 2-го и 3-го порядка. Правило Крамера

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Аналитическая геометрия для физиков

Курс аналитической геометрии изучается в течение 2-го семестра. Он включает введение (необходимый вспомогательный материал — элементы теории матриц и определителей), векторную алгебру, теорию прямых и плоскостей и кривые и поверхности 2-го порядка, а также первоначальную информацию о комплексных числах. Можно использовать любые учебники для университетов по аналитической геометрии. Список литературы приведен на следующем слайде.

По курсу читаются лекции и проводятся практические занятия. *Для записи лекций и практических занятий нужно завести две ОТДЕЛЬНЫЕ тетради.* Ни в коем случае не следует записывать лекции и практические занятия подряд друг за другом в одной тетради!
На практических занятиях решаются задачи и задаются домашние задания. Их можно записывать в одной тетради.

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Любое издание.
2. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. Любое издание.
3. Сизый С.В. Лекции по аналитической геометрии. Изд. фирма "Физико-математическая литература", Москва, 2021.
4. Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса. Изд-во УрГУ, Екатеринбург, 2010 (2-е изд).
5. Фейнман Ричард. Фенмановские лекции по физике. Том 1. Любое издание.

Книги [1-3] — университетские учебники; [1] — для студентов-физиков.
Книга [5] содержит многие интересные примеры появления в физике понятий аналитической геометрии.
Задачник [4] используется на практических занятиях и доступен в виде pdf файла в закладке «Книги» страницы А.Я.Овсянникова на сайте кафедры алгебры и фундаментальной информатики.
kadm.kmath.ru Преподаватели Овсянников

О слайдах

Набор слайдов для печати будет разбит на темы, нумеруемые по порядку. Чтобы делать ссылки на утверждения, доказанные ранее, поступаем так: <утверждение> сл. n т. k означает ссылку на <утверждение> (теорему, предложение, следствие), сформулированное на слайде номер n темы k. Аналогично делаются ссылки на выделенные формулы. Если слайд, на который делается ссылка, находится в той же теме, то номер темы не указывается.

Определяемые понятия выделяются *курсивом и цветом*. Начало и конец доказательства утверждения выделяются символами $\Downarrow$ и $\Uparrow$ соответственно.

Понятие матрицы

Определение

Матрицей размеров $m \times k$ над множеством $\mathbb{R}$ называется прямоугольная таблица из чисел, имеющая m строк и k столбцов. Числа, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*.

Принято записывать матрицы размеров $m \times k$ в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Определения

Если матрица A имеет размеры $m \times m$, то ее называют *квадратной матрицей порядка* m. Говорят, что элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы A. Элементы $a_{m1}, a_{m-1\,2}, \dots, a_{1m}$ образуют ее *побочную диагональ*.

В курсе аналитической геометрии важную роль играют квадратные матрицы порядка 2 и 3, а также матрицы-строки размеров 1×2 и 1×3.

Рассмотрим линейные операции над матрицами: сложение матриц и умножение матрицы на скаляр. Напомним, что для краткости скалярами называются числа.

Сложение определено только для матриц одинаковых размеров. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – матрицы размеров $m \times k$. *Суммой* матриц A и B называется матрица, обозначаемая через $C = A + B$ и имеющая вид $C = (c_{ij})_{m \times k}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$.

Например, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$;

сумма $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ не определена.

Умножение матрицы на скаляр

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times k}$ и скаляра t называется матрица таких же размеров, как матрица A, обозначаемая через $D = tA$ и имеющая вид $D = (d_{ij})_{m\times k}$, каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы A на скаляр t: $d_{ij} = ta_{ij},\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,k$.

Например, $4\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & -8 & 40 \\ -4 & 0 & 36 \end{pmatrix}$.

Свойства линейных операций

Для сложения матриц и умножения матрицы на число выполняются следующие проверяемые очевидным образом свойства.

1. Для любых матриц A, B одинаковых размеров справедливо равенство $A+B=B+A$.

2. Для любых матриц A, B C одинаковых размеров справедливо равенство $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. Существует матрица $O=O_{m\times k}$ размеров $m\times k$ такая, что для любой матрицы A таких же размеров справедливо равенство $A+O=A$.

4. Для любой матрицы $A_{m\times k}$ существует матрица B тех же размеров такая, что справедливо равенство $A+B=O_{m\times k}$.

5. Для любых матриц A, B одинаковых размеров и любого числа t справедливо равенство $t(A+B)=tA+tB$.

6. Для любой матрицы A и любых чисел s,t справедливо равенство $(s+t)A=sA+tA$.

7. Для любой матрицы A и любых чисел s,t справедливо равенство $s(tA)=(st)A=t(sA)$.

8. Для любой матрицы A справедливо равенство $1A=A$.

Свойства 1 и 2 следуют из соответствующих свойств сложения чисел. В свойстве 3 в качестве $O_{m\times k}$ следует взять матрицу размеров $m \times k$ с нулевыми элементами; такая матрица называется *нулевой*. В свойстве 4 в качестве B можно взять матрицу с элементами, противоположными элементам матрицы A; такая матрица называется *противоположной* матрице A. Свойства 5–8 обеспечиваются соответствующими свойствами операций над числами.

Определители второго порядка

Определение

Определителем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

второго порядка (или просто *определителем второго порядка*) называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - (-3) \cdot 1 = -11; \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Видно, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то решениями системы могут быть лишь $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. С другой стороны, прямой подстановкой можно проверить, что эти выражения являются решениями.

Итак, *если* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, *то система* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{cases}$ *имеет единственное решение.*

Утверждение о том, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$ имеет единственное решение, составляет содержание *теоремы Крамера*, а формулы $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$, по которым это единственное решение вычисляется, называются *формулами Крамера*.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, т.е. определитель основной матрицы системы, называют *главным определителем системы*. Заметим, что определители в числителях формул Крамера получаются из Δ по простому правилу: *столбец коэффициентов при искомом неизвестном заменяется на столбец свободных членов.* Они называются *определители при неизвестных*.

Произвольная система линейных уравнений называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных.

Решение системы с двумя неизвестными

Рассмотрим пример применения теоремы Крамера. Требуется решить крамеровскую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x - 6y = 4; \\ 9x - 8y = -7. \end{cases}$$

Вычислим главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = -56 + 54 = -2.$$

По теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители при неизвестных:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 42 = -74, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = -49 - 36 = -85.$$

Получаем ответ:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 37, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 42\frac{1}{2}.$$

Определение

Определителем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка (или просто *определителем третьего порядка*) называется число, равное

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot (-2)$$

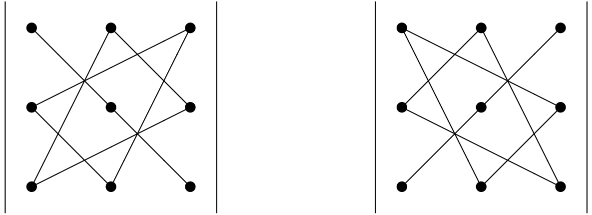
$$= 3 - 5 + 0 - 6 - 0 + 10 = 2.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит громоздко. Укажем правило, позволяющее ее запомнить.

Определитель третьего порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три – со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На следующей схеме слева соединены элементы матрицы, произведение которых берется со знаком плюс, а справа – элементы, произведение которых берется со знаком минус:

Со знаком плюс

Со знаком минус



Правило треугольников

Определители третьего порядка можно применять для решения крамеровских систем линейных уравнений с тремя неизвестными подобно тому, как определители второго порядка применяются для решения таких систем линейных уравнений с двумя неизвестными. Свяжем с крамеровской системой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

четыре определителя третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *определителем системы*, а определители Δ_i получаются из него заменой i-го столбца на столбец свободных членов и называются *определителями при неизвестных*.

Теорема Крамера для систем третьего порядка

Если $\Delta \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое вычисляется по *формулам Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Мы докажем эту теорему позднее, когда познакомимся со свойствами определителей.

Все перечисленные ниже свойства определителей проверяются непосредственно для определителей 2 или 3 порядка, а записываются в общем виде (в котором они справедливы для определителей любого порядка). Доказательства в общем виде будут приведены в курсе линейной алгебры.

Свойство 1 аддитивности определителя относительно строки

Имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства 2-4

Свойство 2 однородности определителя относительно строки

Общий множитель всех элементов одной строки определителя можно вынести за знак определителя, т.е. имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из свойства 2 непосредственно вытекает

Свойство 3 определителя матрицы, содержащей нулевую строку

Определитель матрицы, содержащей нулевую строку, равен нулю.

Свойство 4 определителя с двумя одинаковыми строками

Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

Из свойств 2 и 4 вытекает

Свойство 5

Определитель, имеющий две пропорциональные строки, равен нулю.

Из свойств 1 и 5 получается

Свойство 6

Если к элементам одной строки определителя прибавить элементы некоторой другой строки, умноженные на одно и то же число, то полученный определитель будет равен исходному.

Свойство 7

Если в определителе Δ поменять местами две строки, сохранив расположение остальных строк, то полученный определитель будет равен $-\Delta$.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$. *Транспонированной* к матрице A называется матрица, полученная из A заменой строк на столбцы. Она обозначается через $A^\top$ и при $n = 2, 3$ получается по формулам $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свойство 8

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $(n = 2, 3)$. Тогда $|A^\top| = |A|$.

Из этого утверждения вытекает принцип "равноправия строк и столбцов" в определителе: для каждого свойства определителей, формулируемого в терминах строк, справедливо аналогичное свойство для столбцов. Таким образом, для столбцов определителя справедливы аналоги свойств 1-7.

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

Определение

Минором элемента a_{ij} в определителе $|A|$ называется определитель квадратной подматрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j. Обозначение: M_{ij}.

Определение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителе $|A|$ называется $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Обозначение: A_{ij}.

Пример: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$. Тогда $A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -9$;

$A_{21} = -M_{21}$, $M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2$.

Разложение определителя по строке или столбцу

Пусть $\Delta = |A|$ — определитель 3-го порядка.

Правило разложения определителя по строке

Определитель равен сумме произведений элементов своей фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место равенство $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$. При $k \neq i$ имеет место равенство $a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + a_{k3}A_{i3} = 0$, которое формулируется так: сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки равна нулю.

Правило разложения определителя по столбцу

Определитель равен сумме произведений элементов своего фиксированного столбца на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место равенство $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{j3}A_{j3}$. При $k \neq j$ имеет место равенство $a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = 0$, которое формулируется так: сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другого столбца равна нулю.

Эти утверждения легко проверить непосредственно.

Например, докажем, что для определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ справедливо равенство $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

$\Downarrow a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$

$a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$-a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$

$-a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0 \Uparrow$.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix}$.

Первую строку прибавим ко второй, умножим первую строку на -2 и прибавим к третьей. Полученный определитель разложим по третьему столбцу и придем к определителю второго порядка. Получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Реализованный в этом примере способ вычисления определителя называется *понижением порядка определителя*.

Запишем крамеровскую систему линейных уравнений 3-го порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Напомним, что $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$. Пусть $\Delta \neq 0$. Через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} в определителе Δ. Для доказательства единственности умножим 1-е уравнение системы (1) на A_{1i}, 2-е на A_{2i}, 3-е на A_{3i} и сложим полученные уравнения: $x_1(a_{11}A_{1i} + a_{21}A_{2i} + a_{31}A_{3i}) + x_2(a_{12}A_{1i} + a_{22}A_{2i} + a_{32}A_{3i}) + x_3(a_{13}A_{1i} + {}$ ${}+ a_{23}A_{2i} + a_{33}A_{3i}) = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + b_3A_{3i}$. Таким образом, $x_i\Delta = \Delta_i$ и $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ при $i = 1, 2, 3$. Здесь используются разложения вспомогательных определителей $\Delta_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$, $\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}$, $\Delta_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}$, а также свойства определителей со сл.24:

$$a_{k1}A_{m1} + a_{k2}A_{m2} + a_{k3}A_{m3} = \begin{cases} \Delta, k = m, \\ 0, k \neq m. \end{cases}$$

Положим $c_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ для $j = 1, 2, 3$. Подставим c_1, c_2, c_3 вместо x_1, x_2, x_3 в левую часть k-го уравнения системы (1)$(k = 1, 2, 3)$:
$a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + a_{k3}c_3 = \dfrac{1}{\Delta}(a_{k1}\Delta_1 + a_{k2}\Delta_2 + a_{k3}\Delta_3) =$
$\dfrac{1}{\Delta}(a_{k1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) + a_{k2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) + a_{k3}(b_1A_{13} +$
$b_2A_{23} + b_3A_{33})) = \dfrac{1}{\Delta}(b_1(a_{k1}A_{11} + a_{k2}A_{12} + a_{k3}A_{13}) + b_2(a_{k1}A_{21} +$
$a_{k2}A_{22} + a_{k3}A_{23}) + b_3(a_{k1}A_{31} + a_{k2}A_{32} + a_{k3}A_{33})) = \dfrac{1}{\Delta}(b_k\Delta) = b_k.$
Здесь также используются разложения вспомогательных определителей $\Delta_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$, $\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}$, $\Delta_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}$, и свойства определителей со сл.24:

$$a_{k1}A_{m1} + a_{k2}A_{m2} + a_{k3}A_{m3} = \begin{cases} \Delta, k = m, \\ 0, k \neq m. \end{cases}$$

Таким образом, строка (c_1, c_2, c_3) является единственным решением системы линейных уравнений (1). Доказательство закончено.

Рассмотрим пример применения теоремы Крамера для решения крамеровской системы с тремя неизвестными. Решим систему

$$\begin{cases} 4x + 4y + z = 13; \\ x + 4y + 4z = 4; \\ x - 2y + z = 7. \end{cases}$$

Вычислим главный определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 54$. По теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители при неизвестных: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$ $36\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -36\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 216$,

Окончание решения примера

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -15 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-9 \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -54,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 54.$$

Находим решение системы:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 4, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Теорему Крамера наиболее удобно использовать для решения крамеровских систем линейных уравнений с двумя неизвестными.