

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (11, 3, -16)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

2. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{3}$ образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -1$, $\vec{x}\vec{b} = 10$, где $\vec{a} = (4, 2, -7)$ и $\vec{b} = (8, -1, 3)$.

3. Найти вектор \vec{c} длины $2\sqrt{3}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

4. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 120° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 5$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. На плоскости даны два базиса: (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(-1, 3)$ и $(2, -7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e}'_1 - 4\vec{e}'_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1, 3)$ и $C(6, 2)$. Составить уравнения его сторон.

9. Точка $A(2, 0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $\ell : x + y - 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

10. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 6x - y + 15 = 0$, $(AC) : x + 6y + 21 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

11. Определить положение точки $D(-1, 1)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(AC) : 5x + 2y - 7 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$.

12. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 7y - 4 = 0$ и $3x + 7y + 5 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

14. Даны три плоскости $2x + 3y - 4z + 5 = 0$, $2x - z + 3 = 0$, $x + y - z = 0$. Через линию пересечения двух первых плоскостей провести плоскость так, чтобы линия ее пересечения с третьей плоскостью была перпендикулярна к линии пересечения первой и второй плоскостей.

15. Найти расстояние от точки $M(11, 8, 9)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+7}{5} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-1}{-2}$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 2

1. Найти вектор \vec{c} длины $\sqrt{14}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.
2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (17, -3, -6)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.
3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{83}$ образует с осью Oz тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 66$, $\vec{x}\vec{b} = 6$, где $\vec{a} = (7, -4, -1)$ и $\vec{b} = (1, 2, -1)$.
4. Даны векторы $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$ и $\vec{c} = (0, -1, 2)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{42}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.
5. На плоскости даны два базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(1, 3)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2$ во втором базисе.
6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.
7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3$.
8. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : x + 2y - 2 = 0$, а одна из боковых сторон — на прямой $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$. Расстояние от другой боковой стороны до точки $\ell_1 \cap \ell_2$ равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Составить уравнение этой боковой стороны.
9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(AC) : 5x + 2y - 7 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.
10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 6x - y + 15 = 0$, $(CD) : x + 6y + 21 = 0$, $(DA) : 5x + 2y - 7 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.
11. Даны уравнения параллельных прямых $5x - 2y - 3 = 0$ и $5x - 2y + 4 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, в котором лежит начало координат.

13. Через линию пересечения плоскостей $x + 5y + z = 0$ и $x - z + 4 = 0$ провести плоскость, образующую угол $\pi/4$ с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(11, 8, 9)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+2}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z+1}{-2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного двумя прямыми $x - 4y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 3

1. Найти вектор \vec{c} длины $\sqrt{3}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (-2, -1, 3)$ и $\vec{s} = (-5, -5, 8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{14}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -6$, $\vec{x}\vec{b} = 12$, где $\vec{a} = (5, 5, -8)$ и $\vec{b} = (1, 1, 5)$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. На плоскости даны два базиса: (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(-1, -3)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e}'_1 - 4\vec{e}'_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1, 3)$ и касающихся прямых $\ell_1 : 7x + y = 0$ и $\ell_2 : x - y + 8 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(BC) : 5x - 7y + 23 = 0$, $(AC) : 7x + 5y + 47 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-3, 0)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(AC) : 7x - 3y + 11 = 0$, $(BC) : 12x - 2y + 33 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 2y - 1 = 0$ и $3x - 2y + 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$ и образующей угол $\pi/3$ с прямой $x - y + z = 0$, $x - y + 2z = 0$.

14. Найти расстояние от точки $M(6, 3, -6)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+5}{3} = \frac{y+12}{9} = \frac{z-7}{2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы острого угла, образованного двумя прямыми $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 4

1. Найти вектор \vec{c} длины $\sqrt{21}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (-3, 2, -1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (5, 5, -8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{59}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 14$, $\vec{x}\vec{b} = 3$, где $\vec{a} = (1, -3, 2)$ и $\vec{b} = (1, 1, 1)$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ и $\vec{c} = (0, -1, 2)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. На плоскости даны два базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(1, -3)$ и $(-2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : 2x + y - 2 = 0$, а точка $A(3, -1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна $\frac{9}{4}$. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты этого треугольника.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(AC) : 7x - 3y + 11 = 0$, $(BC) : 12x - 2y + 33 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(BC) : 5x - 7y + 23 = 0$, $(CD) : 7x + 5y + 47 = 0$, $(DA) : 7x - 3y + 11 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $8x - 5y - 3 = 0$ и $8x - 5y - 15 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

13. Показать, что три плоскости $11x + 10y + 2z = 0$, $3x + 4y = 0$, $10x + 11y + z + 6 = 0$ образуют призму, и найти ее внутренний двугранный угол, образованный первой и второй плоскостями.

14. Найти точку, симметричную $M(6, 3, -6)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-9}{2}$.

15. Написать уравнения сторон ромба, зная точку $M(-1, 4)$ пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах: $P(1, -2)$ на стороне AB , $Q(4, 4)$ на стороне BC , $R(3, 7)$ на стороне CD .

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 5

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$. Найти вектор \vec{c} длины $\sqrt{3}$, ортогональный векторам \vec{a} и \vec{b} , и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (9, 2, -13)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{11}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 3$, $\vec{x}\vec{b} = 3$, где $\vec{a} = (1, -2, 2)$ и $\vec{b} = (2, 2, 1)$.

4. Доказать, что точки $A(4, 2, 3)$, $B(1, 1, 4)$, $C(2, 1, 3)$ и $D(1, 0, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса: (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(-1, 2)$ и $(2, -7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e}'_1 - 4\vec{e}'_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. На плоскости даны три точки $A(2, 3)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 2)$, и прямая $\ell : x - 5y + 7 = 0$. Составить уравнение этой прямой в системе координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(AC) : 13x + 20y + 47 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-3, 3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 8x + 13y + 11 = 0$, $(AC) : 9x + 16y + 11 = 0$, $(BC) : 17x + 29y + 33 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $2x + 3y - 5 = 0$ и $2x + 3y - 11 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(-3, 4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

13. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, в котором лежит начало координат.

14. Найти расстояние от точки $M(17, 1, 7)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{8} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-1}{-8}$.

15. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 6

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$. Найти вектор \vec{c} длины $\sqrt{3}$, ортогональный векторам \vec{a} и \vec{b} , и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (10, 0, -9)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{14}$ образует с осью Ox тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -20$, $\vec{x}\vec{b} = 11$, где $\vec{a} = (1, -6, -8)$ и $\vec{b} = (4, -7, 4)$.

4. Доказать, что точки $A(1, 4, 1)$, $B(1, 1, -2)$, $C(-1, 2, 3)$ и $D(0, 2, 1)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(1, 2)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Прямые $\ell_1 : x - 3y + 2 = 0$ и $\ell_2 : 3x + 2y - 5 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1, 2)$ имеет в новой системе координаты $(1, 1)$. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $5x - 4y + 7 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 8x + 13y + 11 = 0$, $(AC) : 9x + 16y + 11 = 0$, $(BC) : 17x + 29y + 33 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(CD) : 13x + 20y + 47 = 0$, $(DA) : 9x + 16y + 11 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $9x - 4y - 5 = 0$ и $9x - 4y - 12 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x - 2y + z - 5 = 0$, $3x + 6y - 2z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 2)$.

13. С помощью аналитической геометрии найти расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 6.

14. Найти точку, симметричную $M(17, 1, 7)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+1}{8} = \frac{y+6}{-5} = \frac{z+7}{-8}$.

15. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(15, 10)$ и $(10, 5)$, зная, что прямая $x + 2y = 0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 7

1. По векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (-3, -4, 5)$ и $\vec{s} = (-3, -4, 5)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{11}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 5$, $\vec{x}\vec{b} = 29$, где $\vec{a} = (5, 2, -8)$ и $\vec{b} = (8, 4, 9)$.

4. Доказать, что точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-1, 1, 3)$ и $D(0, 1, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса: (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(-1, -2)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e}'_1 - 4\vec{e}'_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана прямая $\ell : \sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной декартовой системы координат $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ имеет в исходной системе координаты $O'(-2, 3)$, а базисные векторы \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 получаются из векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2 соответственно поворотом на угол $\pi/6$ в направлении кратчайшего поворота от \vec{e}_1 к \vec{e}_2 . Составить уравнение прямой ℓ в системе координат $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(BC) : 8x - 15y + 26 = 0$, $(AC) : 11x - 16y - 29 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(9, 6)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(AC) : x - 4y + 5 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $7x - 4y - 3 = 0$ и $7x - 4y - 8 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $2x + 6y + 3z + 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

13. Найти расстояние от точки $(1, 3, 5)$ до прямой $5x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + y + 2z - 3 = 0$.

14. Найти расстояние от точки $M(-6, -1, -2)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-8}{5}$.

15. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x + 3y - 10 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ перпендикуляров, восстановленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 8

1. По векторам $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, 1)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (-2, 1, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (3, 4, -5)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{19}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -29$, $\vec{x}\vec{b} = -4$, где $\vec{a} = (1, 8, -8)$ и $\vec{b} = (2, -5, -5)$.

4. Доказать, что точки $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 4, 1)$, $C(1, -1, 0)$ и $D(2, 4, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Векторы второго базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 имеют в первом базисе координаты $(1, -2)$ и $(-2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 8$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Прямые $\ell_1 : 2x - y + 1 = 0$ и $\ell_2 : x + 2y - 7 = 0$, заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(2, 0)$ имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $4x + y - 1 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(AC) : x - 4y + 5 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(BC) : 8x - 15y + 26 = 0$, $(CD) : 11x - 16y - 29 = 0$, $(DA) : x - 4y + 5 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $6x - 5y - 1 = 0$ и $6x - 5y - 8 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x - 2y + 2z - 15 = 0$.

13. Доказать, что плоскость $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

14. Найти точку, симметричную $M(-6, -1, -2)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+7}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{5}$.

15. Даны две прямые $3x + 4y - 2 = 0$, $5x - 12y - 4 = 0$ и точка $(1, 1)$. Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния от данных прямых были равны соответственно 3 и 1.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 9

1. По векторам $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$, $\vec{c} = (2, 2, 0)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (11, 3, -16)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{35}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -1$, $\vec{x}\vec{b} = -4$, где $\vec{a} = (6, -1, -4)$ и $\vec{b} = (3, -3, -2)$.

4. Доказать, что точки $A(3, 2, 2)$, $B(0, 5, 2)$, $C(2, 0, 1)$ и $D(3, 5, 3)$ лежат в одной плоскости.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (4, -3)$, $\vec{a}_2 = (2, 1)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон ромба, зная точку $M(-1, 4)$ пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах: $P(1, -2)$ на стороне AB , $Q(4, 4)$ на стороне BC , $R(3, 7)$ на стороне CD .

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(BC) : 20x - 13y + 31 = 0$, $(AC) : 9x - 4y - 36 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(6, 11)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(AC) : 11x - 8y + 12 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 7y - 6 = 0$ и $4x - 7y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Найти расстояние от точки $P(1, 2, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(2, 1, 4)$, $M_3(3, 0, 0)$.

13. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

14. Найти расстояние от точки $M(-5, 8, -4)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+1}{5} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-9}{6}$.

15. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром $(1, 9)$ и радиусом 5 , зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой $x - 7y = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 10

1. По векторам $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$, $\vec{c} = (0, 1, 2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (17, -3, -6)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.
3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{45}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 61$, $\vec{x}\vec{b} = -23$, где $\vec{a} = (2, -9, 7)$ и $\vec{b} = (1, -9, -9)$.
4. Доказать, что точки $A(-2, 1, 1)$, $B(1, 4, 1)$, $C(-1, -1, 0)$ и $D(-2, 4, 2)$ лежат в одной плоскости.
5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (4, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, -1)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.
6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.
7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.
8. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$.
9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(AC) : 11x - 8y + 12 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.
10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(BC) : 20x - 13y + 31 = 0$, $(CD) : 9x - 4y - 36 = 0$, $(DA) : 11x - 8y + 12 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.
11. Даны уравнения параллельных прямых $2x + 3y - 5 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.
13. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ и параллельных прямым $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}$, $\frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}$.

14. Найти точку, симметричную $M(-5, 8, -4)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-15}{6}$.

15. Даны уравнения $3x - 2y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y - 1 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 11

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1, -2)$. Найти вектор $[\vec{a} + \vec{c}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}(\vec{b} + 2\vec{c}))\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (-5, -5, 8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{17}$ образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 33$, $\vec{x}\vec{b} = -26$, где $\vec{a} = (1, 9, 9)$ и $\vec{b} = (2, -3, -7)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2, 3, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (-4, -3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 1)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(15, 10)$ и $(10, 5)$, зная, что прямая $x + 2y = 0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(AC) : 45x + 32y + 16 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-14, 20)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(AC) : 29x + 20y - 4 = 0$, $(BC) : 56x + 39y + 1 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x + 5y - 9 = 0$ и $4x + 5y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z - 6 = 0, \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. Найти проекцию точки $C(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

14. Найти расстояние от точки $M(-4, -3, 6)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-1}{8}$.

15. Вершинами треугольника являются точки $A(20, 15)$, $B(-16, 0)$, $C(-8, -6)$. Найти длины радиусов и координаты центров вписанной и описанной окружностей.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 12

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$ и $\vec{c} = (2, 2, 0)$. Найти вектор $[[\vec{a}, -\vec{b}], \vec{a} + \vec{c}] - (\vec{a}\vec{c})(2\vec{b} - \vec{c})$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (-3, 2, -1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (5, 5, -8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{17}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 11$, $\vec{x}\vec{b} = 3$, где $\vec{a} = (5, -6, 4)$ и $\vec{b} = (1, -2, 2)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(3, 4, 2)$, $B(6, 6, 5)$, $C(4, 3, 0)$, $D(-4, -3, 9)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (1, -3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x + 3y - 10 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ перпендикуляров, восстановленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(AC) : 29x + 20y - 4 = 0$, $(BC) : 56x + 39y + 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(CD) : 45x + 32y + 16 = 0$, $(DA) : 29x + 20y - 4 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 1 = 0$ и $4x - 3y - 9 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x + 2y + z - 5 = 0$, $3x - 2y + 6z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 2)$.

13. Доказать, что через прямую $\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$ можно провести две плоскости, касательные к сфере $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(-4, -3, 6)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+4}{7} = \frac{y+13}{8} = \frac{z+7}{8}$.

15. Точка $A(2, 0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $\ell : x + y - 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 13

1. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ и $C(5, 2, 6)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.
2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (9, 2, -13)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.
3. Вектор \vec{x} длины $3\sqrt{3}$ образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 9$, $\vec{x}\vec{b} = 9$, где $\vec{a} = (1, -2, -2)$ и $\vec{b} = (2, 2, -1)$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(4, 5, 3)$, $B(7, 7, 6)$, $C(5, 4, 1)$, $D(-3, -2, 10)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .
5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (-1, -3)$, $\vec{a}_2 = (2, -5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.
6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.
7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.
8. Даны две прямые $3x + 4y - 2 = 0$, $5x - 12y - 4 = 0$ и точка $(1, 1)$. Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния от данных прямых были равны соответственно 3 и 1.
9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 15x + 11y - 7 = 0$, $(BC) : 25x + 17y - 29 = 0$, $(AC) : 39x + 28y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.
10. Определить положение точки $D(9, -12)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 15x + 11y - 7 = 0$, $(AC) : x + 1 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$.
11. Даны уравнения параллельных прямых $5x + 8y - 1 = 0$ и $5x + 8y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
12. Доказать, что плоскость $12x - 16y + 15z - 175 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.
13. Найти точку Q , симметричную точке $P(3, -4, -6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6, 1, -5)$, $M_2(7, -2, -1)$, $M_3(10, -7, 1)$.

14. Найти расстояние от точки $M(9, 2, -3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+4}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-5}{-3}$.

15. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : x + 2y - 2 = 0$, а одна из боковых сторон — на прямой $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$. Расстояние от другой боковой стороны до точки $\ell_1 \cap \ell_2$ равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Составить уравнение этой боковой стороны.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 14

1. Даны точки $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$ и $C(6, 3, 7)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.
2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (10, 0, -9)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.
3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{30}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 7$, $\vec{x}\vec{b} = 4$, где $\vec{a} = (1, -4, 3)$ и $\vec{b} = (3, 5, -8)$.
4. Даны вершины тетраэдра $A(5, 6, 4)$, $B(8, 8, 7)$, $C(6, 5, 2)$, $D(-2, -1, 11)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .
5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (1, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, 5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.
6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.
7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.
8. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром $(1, 9)$ и радиусом 5, зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой $x - 7y = 0$.
9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 15x + 11y - 7 = 0$, $(AC) : x + 1 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.
10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 15x + 11y - 7 = 0$, $(BC) : 25x + 17y - 29 = 0$, $(CD) : 39x + 28y + 11 = 0$, $(DA) : x + 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.
11. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 4y + 1 = 0$ и $3x - 4y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z - 10 = 0$.
13. Доказать, что через прямую $\frac{x+6}{3} = y + 3 = z + 1$ нельзя провести плоскость, касательную к сфере $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.
14. Найти точку, симметричную $M(9, 2, -3)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+6}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-8}{-3}$.

15. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1, 3)$ и касающихся прямых $\ell_1 : 7x + y = 0$ и $\ell_2 : x - y + 8 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 15

1. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ и $C(5, 2, 6)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A .

2. Даны векторы $\vec{p} = (5, 1, -4)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (-3, -4, 5)$ и $\vec{s} = (6, 7, -13)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{30}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -19$, $\vec{x}\vec{b} = 10$, где $\vec{a} = (1, 6, -9)$ и $\vec{b} = (3, 3, -1)$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (-1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7, 15)$, а середина его основания в точке $(1, 3)$. Составить уравнения сторон треугольника, зная, что тангенс угла при основании равен 4.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y + 7 = 0$, $(AC) : 7x - 4y - 1 = 0$, $(BC) : 12x - 2y + 33 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-3, -3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y + 7 = 0$, $(AC) : 7x - 4y - 1 = 0$, $(BC) : 12x - 2y + 33 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 7y + 10 = 0$ и $3x + 7y - 5 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, 4, -6)$ и $M_2(-1, 2, 2)$.

13. Найти точку Q , симметричную точке $P(-3, 2, 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые

$$\begin{cases} x - 2y - 4z + 3 = 0, \\ x - 2y + 2z - 5 = 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

14. Найти расстояние от точки $M(15, 6, 11)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-3}$.

15. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : 2x + y - 2 = 0$, а точка $A(3, -1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна $\frac{9}{4}$. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты этого треугольника.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 16

1. Даны точки $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$ и $C(6, 3, 7)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A .

2. Даны векторы $\vec{p} = (-2, 1, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (3, 4, -5)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора \vec{s} в этом базисе.

3. Вектор \vec{x} длины $\sqrt{21}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 21$, $\vec{x}\vec{b} = 14$, где $\vec{a} = (4, -1, 2)$ и $\vec{b} = (3, -8, -3)$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 3, -1)$, $B(3, 2, 1)$, $C(2, 1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-2, -5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения $3x - 2y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y - 1 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 13y - 7 = 0$, $(AC) : 23x + 16y - 1 = 0$, $(BC) : 41x + 29y + 3 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y + 7 = 0$, $(BC) : 22x - 15y + 29 = 0$, $(CD) : 21x - 16y - 11 = 0$, $(DA) : 7x - 4y - 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 1 = 0$ и $4x - 3y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x - y + 2z - 5 = 0$, $6x + 2y - 3z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 2)$.

13. Доказать, что через прямую $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ можно провести единственную плоскость, касательную к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$, и составить ее уравнение.

14. Найти точку, симметричную $M(15, 6, 11)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{6} = \frac{y+6}{7} = \frac{z-4}{-3}$.

15. На плоскости даны три точки $A(2, 3)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 2)$, и прямая $\ell : x - 5y + 7 = 0$. Составить уравнение этой прямой в системе координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 17

1. Вектор \vec{x} ортогонален векторам $\vec{a} = (1, -2, 2)$ и $\vec{b} = (2, 1, 0)$ и образует тупой угол с вектором $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Найти вектор \vec{x} , зная, что $|\vec{x}| = 3\sqrt{5}$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (3, 5, 6)$, $e_2 = (1, 2, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (5, 6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\vec{x} = 7$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 5, -1)$, $B(3, 4, 1)$, $C(2, 3, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$ приобретают новые координаты $(3, 4)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y - 10 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y + 7 = 0$, $(BC) : 22x - 15y + 29 = 0$, $(CD) : 21x - 16y - 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-15, 21)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 18x + 13y - 7 = 0$, $(AC) : 23x + 16y - 1 = 0$, $(BC) : 41x + 29y + 3 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 4y - 5 = 0$, $6x + 8y - 15 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $-2x + 6y + 3z + 98 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 196$ и найти координаты точки касания.

13. Убедиться, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z = -2t + 1$ лежат в одной плоскости. Найти уравнение этой плоскости и координаты точки пересечения указанных прямых.

14. Найти расстояние от точки $M(11, -6, 19)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{6} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z+7}{-1}$.

15. Прямые $\ell_1 : x - 3y + 2 = 0$ и $\ell_2 : 3x + 2y - 5 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1, 2)$ имеет в новой системе координаты $(1, 1)$. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $\ell_3 : 5x - 4y + 7 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 18

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 1, -2)$, $\vec{b} = (4, 1, -2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Найти вектор $[[-\vec{a}, \vec{b}], 2\vec{a} - \vec{c}] - (\vec{b}\vec{c})(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (3, 5, 6)$, $e_2 = (-1, -2, -2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (5, 6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = 4$ и $\vec{c}\vec{x} = 7$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 8, -1)$, $B(3, 7, 1)$, $C(2, 6, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(1, -1)$, $B(2, -3)$, $C(3, -2)$ приобретают новые координаты $(3, -4)$, $(5, -7)$, $(7, -5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 8$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1, 1)$, $(2, 8)$ и точки $(4, -3)$, $(-15, 14)$ на ее боковых сторонах.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(AC) : 7x - 4y + 1 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 13y - 7 = 0$, $(BC) : 14x + 9y + 29 = 0$, $(CD) : 27x + 20y + 11 = 0$, $(DA) : 23x + 16y - 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $7x + 9y - 2 = 0$ и $7x + 9y - 6 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ и параллельных плоскости $x - 2y - 2z - 15 = 0$.

13. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(11, -6, 19)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{6} = \frac{y-6}{-9} = \frac{z+6}{-1}$.

15. В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана прямая $\ell : \sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной декартовой системы координат $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ имеет в исходной системе координаты $O'(-2, 3)$, а базисные векторы \vec{e}_1', \vec{e}_2' получаются из векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2 соответственно поворотом на угол $\pi/6$ в направлении кратчайшего поворота от \vec{e}_1 к \vec{e}_2 . Составить уравнение прямой ℓ в системе координат $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 19

1. Вектор \vec{x} ортогонален векторам $\vec{a} = (1, 2, -2)$ и $\vec{b} = (2, 1, 0)$ и образует тупой угол с вектором $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Найти вектор \vec{x} , зная, что $|\vec{x}| = 3\sqrt{5}$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (-3, -5, -6)$, $e_2 = (1, 2, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (5, 6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, -3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\vec{x} = 7$.

4. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (6, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -3, 4)$ и $\vec{c} = (0, 1, -3)$.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-3, 2)$ приобретают новые координаты $(-3, 4)$, $(-5, 7)$, $(-7, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 2$, $\widehat{b_1, b_2} = \widehat{b_1, b_3} = \widehat{b_2, b_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения параллельных прямых $9x - 7y - 130 = 0$ и $9x - 7y - 162 = 0$. Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 13y - 7 = 0$, $(BC) : 14x + 9y + 29 = 0$, $(AC) : 27x + 20y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(3, 3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(AC) : 7x - 4y + 1 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x + 7y - 3 = 0$ и $4x + 7y + 1 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Найти расстояние от точки $P(1, 5, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, 0, 3)$, $M_2(3, 2, 5)$, $M_3(4, 1, 1)$.

13. Найти точку Q , симметричную точке $P(4, 1, 6)$ относительно прямой $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

14. Найти расстояние от точки $M(11, -4, 13)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{5} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+8}{-8}$.

15. Прямые $\ell_1 : 2x - y + 1 = 0$ и $\ell_2 : x + 2y - 7 = 0$, заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(2, 0)$ имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $4x + y - 1 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 20

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (4, 1, -2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Найти вектор $[[-\vec{a}, \vec{b}], 2\vec{a} - \vec{c}] - (\vec{b}\vec{c})(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (-3, -5, 6)$, $e_2 = (-1, -2, 2)$, $e_3 = (-1, -2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (-5, -6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, -3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = 4$ и $\vec{c}\vec{x} = 7$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (1, 5, 3)$, $\vec{b} = (7, 2, -2)$ и $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Компланарны ли векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $[-\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}]$?

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-1, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(-3, -2)$ приобретают новые координаты $(-3, -4)$, $(-5, -7)$, $(-7, -5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(4, 6)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(BC) : 22x - 15y - 29 = 0$, $(AC) : 21x - 16y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(BC) : 22x - 15y - 29 = 0$, $(CD) : 21x - 16y + 11 = 0$, $(DA) : 7x - 4y + 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 5y - 4 = 0$ и $3x + 5y - 8 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - 6y + z - 5 = 0$, $3x + 5y - 7z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. На плоскости Oxy найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-1, 2, 5)$ и $B(11, -16, 10)$ была бы наименьшей.

14. Найти точку, симметричную $M(11, -4, 13)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+8}{5} = \frac{y-11}{-7} = \frac{z}{-8}$.

15. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(2, 2)$ и уравнения двух высот $x - 4y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 21

1. Вектор \vec{x} ортогонален векторам $\vec{a} = (2, 1, -2)$ и $\vec{b} = (0, 2, 1)$ и образует острый угол с вектором $\vec{c} = (0, 1, -1)$. Найти вектор \vec{x} , зная, что $|\vec{x}| = \sqrt{5}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (7, 7, -5)$, $\vec{b} = (5, 4, -2)$ и $\vec{c} = (5, 3, 9)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (-11, 7, -77)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{c} = (-1, 2, -4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\vec{x} = -7$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (1, 5, 3)$, $\vec{b} = (7, 2, -2)$ и $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Компланарны ли векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $[-\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}]$?

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 2)$ приобретают новые координаты $(3, 4)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 4y - 25 = 0$ и $3x - 4y - 39 = 0$. Найти расстояние между прямыми.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 13x + 18y - 7 = 0$, $(AC) : 16x + 23y - 1 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(21, -15)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 13x + 18y - 7 = 0$, $(AC) : 16x + 23y - 1 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $7x - 4y - 4 = 0$ и $14x - 8y - 16 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0, \\ 2x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(-3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. На плоскости Oxz найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(3, 2, -5)$ и $B(8, -14, 17)$ была бы наименьшей.

14. Найти расстояние от точки $M(16, -9, 2)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+8}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z+1}{-8}$.

15. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(3, 3)$, уравнения высоты $x-4y+3=0$ и медианы $y-1=0$, проведенных из одной вершины.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 22

1. Даны точки $A(3, 4, 2)$, $B(5, 2, -1)$ и $C(7, 4, 8)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.
2. Даны векторы $\vec{a} = (4, 5, -3)$, $\vec{b} = (6, -1, -1)$ и $\vec{c} = (3, -6, 1)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (39, 49, -24)$.
3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{c} = (-1, 2, -4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = 4$ и $\vec{c}\vec{x} = -7$.
4. Даны векторы $\vec{a} = (1, 5, 3)$, $\vec{b} = (7, 2, -2)$ и $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Компланарны ли векторы $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}]$?
5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(2, -1)$, $B(4, -3)$, $C(3, -2)$ приобретают новые координаты $(3, -4)$, $(5, -7)$, $(7, -5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.
6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.
7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.
8. Даны уравнения параллельных прямых $2x + 3y - 13 = 0$ и $2x + 3y - 11 = 0$. Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 13x + 18y - 7 = 0$, $(BC) : 9x + 14y + 29 = 0$, $(AC) : 20x + 27y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.
10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 13x + 18y - 7 = 0$, $(BC) : 9x + 14y + 29 = 0$, $(CD) : 20x + 27y + 11 = 0$, $(DA) : 16x + 23y - 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.
11. Даны уравнения параллельных прямых $12x - 10y - 4 = 0$ и $6x - 5y - 18 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $6x + 2y + 3z - 5 = 0$, $3x - 2y - 6z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(3, 2, 2)$.
13. На плоскости $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(3, -4, 7)$ и $B(-5, -14, 17)$ была бы наименьшей.

14. Найти точку, симметричную $M(16, -9, 2)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{1} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-7}{-8}$.

15. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения прямых $\ell_1 : 2x + 3y - 5 = 0$ и $\ell_2 : 3x - 2y - 1 = 0$ точка $A(1, 0)$. На плоскости выбрана новая прямоугольная декартова система координат, в которой прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются осями $O'X$ и $O'Y$ соответственно, а точка A лежит в первом квадранте. Найти в этой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $\ell_3 : 5x + 8y - 2 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 23

1. Даны точки $A(-2, -3, -1)$, $B(-4, -1, 2)$ и $C(-6, -3, -7)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (5, -8, 6)$, $\vec{b} = (1, -7, 1)$ и $\vec{c} = (4, -3, -6)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (28, -78, 87)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, -3)$ и $\vec{c} = (-1, 2, -4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\vec{x} = -7$.

4. Выяснить, лежат ли точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(5, -1, 2)$ в одной плоскости.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-2, 1)$, $B(-4, 3)$, $C(-3, 2)$ приобретают новые координаты $(-3, 4)$, $(-5, 7)$, $(-7, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(0, 0)$, $B(4, 3)$, $C(6, 8)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 5x - 6y + 7 = 0$, $(BC) : 15x - 22y + 29 = 0$, $(CD) : 16x - 21y - 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(3, 3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 5x - 6y + 7 = 0$, $(AC) : 4x - 7y - 1 = 0$, $(BC) : x + y - 3 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $8x - 14y - 6 = 0$ и $4x - 7y - 7 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $12x - 16y + 15z - 75 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и найти координаты точки касания.

13. На плоскости $2x + 3y - 4z - 15 = 0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(5, 2, -7)$ и $B(7, -25, 10)$ была бы наименьшей.

14. Найти расстояние от точки $M(2, -2, 3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+6}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

15. На плоскости даны три точки $A(4, 5)$, $B(2, 6)$, $C(1, 4)$, и прямая ℓ : $2x - 5y + 3 = 0$. Составить уравнение этой прямой в системе координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 24

1. Даны точки $A(3, 4, 2)$, $B(5, 2, -1)$ и $C(7, 4, 8)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A .

2. Даны векторы $\vec{a} = (7, -7, 3)$, $\vec{b} = (2, 3, -4)$ и $\vec{c} = (5, -5, 7)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (47, -7, -43)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, -3)$ и $\vec{c} = (-1, 2, -4)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{x} = 4$ и $\vec{c} \cdot \vec{x} = -7$.

4. Выяснить, лежат ли точки $A(5, 1, 1)$, $B(6, 1, 0)$, $C(3, 1, 3)$, $D(8, -1, 2)$ в одной плоскости.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-2, -1)$, $B(-4, -3)$, $C(-3, -2)$ приобретают новые координаты $(-3, -4)$, $(-5, -7)$, $(-7, -5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3$.

8. Даны две вершины треугольника $A(2, -2)$, $B(2, 3)$ и точка пересечения медиан $H(1, 1)$. Найти третью вершину C .

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 5x - 6y + 7 = 0$, $(AC) : 4x - 7y - 1 = 0$, $(BC) : x + y - 3 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 5x - 6y + 7 = 0$, $(BC) : 15x - 22y + 29 = 0$, $(CD) : 16x - 21y - 11 = 0$, $(DA) : 4x - 7y - 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $12x + 5y - 16 = 0$ и $12x + 5y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ и параллельных плоскости $x - 2y - 2z - 10 = 0$.

13. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, -4, -1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x + 3y - 4z + 11 = 0$, $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(2, -2, 3)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{4}$.

15. Прямые $\ell_1 : 2x - y + 1 = 0$ и $\ell_2 : 3x + 4y - 7 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1, 2)$ имеет в новой системе координаты $(1, 1)$. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $\ell_3 : 5x - 4y + 7 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 25

1. Даны точки $A(-2, -3, -1)$, $B(-4, -1, 2)$ и $C(-6, -3, -7)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A .

2. Даны векторы $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, -5, 8)$ и $\vec{c} = (7, -7, 4)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (-58, 70, -54)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (4, -1, 2)$, $\vec{b} = (-1, -2, 6)$ и $\vec{c} = (3, -2, 1)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{c}$, $\vec{a}\vec{x} = 4$ и $\vec{b}\vec{x} = 1$.

4. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – правая. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 1)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2, 3)$ и последующего поворота системы координат по часовой стрелке на угол $\pi/3$.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти длину высоты AD треугольника ABC : $A(2, -3)$, $B(3, -4)$, $C(3, -1)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 23y - 12 = 0$, $(AC) : 23x + 30y - 8 = 0$, $(BC) : 41x + 53y - 9 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(26, -20)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 18x + 23y - 12 = 0$, $(AC) : 23x + 30y - 8 = 0$, $(BC) : 41x + 53y - 9 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $8x + 10y - 16 = 0$ и $4x + 5y - 2 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} -3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(5, 4, -6)$ и $M_2(-1, 2, 2)$.

13. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1, 2, -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = (6, -2, -3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

14. Найти расстояние от точки $M(1, -4, -2)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+7}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$.

15. В прямоугольной декартовой системе координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана прямая $\ell : x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной декартовой системы координат $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ имеет в исходной системе координаты $O'(-2, 1)$, а базисные векторы \vec{e}_1', \vec{e}_2' получаются из векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2 соответственно поворотом на угол $\pi/3$ в направлении кратчайшего поворота от \vec{e}_1 к \vec{e}_2 . Составить уравнение прямой ℓ в системе координат $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 26

1. По векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 5, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -3)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (1, -5, -7)$, $\vec{b} = (4, -1, 4)$ и $\vec{c} = (3, -4, 5)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (6, -37, 6)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 3, -1)$ и $\vec{c} = (3, -1, 2)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\vec{x} = 9$.

4. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – правая. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 5$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 1)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2, 1)$ и последующего поворота системы координат против часовой стрелки на угол $\pi/3$.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(2, 2)$ и уравнения двух высот $x - 4y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(AC) : 7x - 10y - 8 = 0$, $(BC) : x - 3y - 9 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 23y - 12 = 0$, $(BC) : 14x + 19y + 24 = 0$, $(CD) : 27x + 34y + 4 = 0$, $(DA) : 23x + 30y - 8 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 6 = 0$ и $4x - 3y - 16 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $3x - 6y + 2z - 5 = 0$, $6x + 2y - 3z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 5)$.

13. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4, -5, 3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

14. Найти точку, симметричную $M(1, -4, -2)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+6}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-7}{3}$.

15. Прямые $\ell_1 : 3x - y - 2 = 0$ и $\ell_2 : x + 3y - 7 = 0$, заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(2, 0)$ имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3 , которая в исходной системе имеет уравнение $4x + 7y - 1 = 0$.

1. По векторам $\vec{a} = (1, 4, 2)$, $\vec{b} = (2, 4, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, 2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (8, 3, -1)$, $\vec{b} = (4, -3, 8)$ и $\vec{c} = (2, 5, -6)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (30, 46, -58)$.

3. Векторы \vec{a} и \vec{b} ортогональны, вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 3$, вычислить скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} - 3\vec{c})$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{42}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 2)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2, 3)$ и последующего поворота системы координат по часовой стрелке на угол $\pi/6$.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти проекцию точки $P(1, -3)$ на прямую, проходящую через точки $A(3, 0)$ и $B(1, 2)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 23y - 12 = 0$, $(BC) : 14x + 19y + 24 = 0$, $(AC) : 27x + 34y + 4 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-6, -4)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(AC) : 7x - 10y - 8 = 0$, $(BC) : x - 3y - 9 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $5x + 12y - 1 = 0$ и $5x + 12y - 14 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $-2x + 6y - 3z + 77 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 121$ и найти координаты точки касания.

13. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x = 3t - 4$, $y = -2t + 2$, $z = 3t + 7$ и $x = t + 2$, $y = 2t - 6$, $z = -t - 13$.

14. Найти расстояние от точки $M(9, -1, 11)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$.

15. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1, 3)$ и $C(7, 5)$. Составить уравнения его сторон.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 28

1. По векторам $\vec{a} = (-1, 2, -7)$, $\vec{b} = (1, 3, 5)$, $\vec{c} = (2, 3, 0)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (9, 1, 1)$, $\vec{b} = (8, -8, 3)$ и $\vec{c} = (2, -1, -2)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (119, -26, 15)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ и $\vec{c} = (-3, -2, 1)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{b}\vec{x} = 9$ и $\vec{c}\vec{x} = 3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 2)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2, 1)$ и последующего поворота системы координат против часовой стрелке на угол $\pi/6$.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 8$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(3, 3)$, уравнения высоты $x - 4y + 3 = 0$ и медианы $y - 1 = 0$, проведенных из одной вершины.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(BC) : 22x - 29y + 24 = 0$, $(AC) : 21x - 26y - 4 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(BC) : 22x - 29y + 24 = 0$, $(CD) : 21x - 26y - 4 = 0$, $(DA) : 7x - 10y - 8 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 4y + 3 = 0$ и $6x - 8y - 4 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z - 15 = 0$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

14. Найти точку, симметричную $M(9, -1, 11)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+9}{-2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного двумя прямыми $3x - 4y + 1 = 0$, $8x - 6y + 2 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 29

1. По векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3, 1, 2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (1, 3, 3)$, $\vec{b} = (4, -2, 5)$ и $\vec{c} = (1, -7, 3)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (-23, 61, -34)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ и $\vec{c} = (-3, -2, 1)$. Найти вектор \vec{x} такой, что $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{b}\vec{x} = 9$ и $\vec{c}\vec{x} = 3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 1)$. Найти угол, на который нужно повернуть эту систему координат против часовой стрелки, чтобы точка A имела координаты $(\sqrt{2}, 0)$.

6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти точку Q , симметричную точке $P(3, 5)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1, -1)$ и $B(4, -2)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(BC) : 16x + 43y + 21 = 0$, $(CD) : 15x + 38y + 16 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(26, -10)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(AC) : 19x + 50y - 4 = 0$, $(BC) : 31x + 81y + 1 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 7y + 10 = 0$ и $6x + 14y - 1 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Найти расстояние от точки $P(6, 5, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3, 1, 4)$, $M_2(4, 3, 6)$, $M_3(5, 2, 2)$.

13. Составить уравнения проекции прямой $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.

14. Найти расстояние от точки $M(1, 2, -3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-8}{2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы острого угла, образованного двумя прямыми $8x + 15y - 23 = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$.

Домашняя контрольная работа по аналитической геометрии

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант 30

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 3, -2)$. Найти вектор $[\vec{a} + \vec{c}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}(\vec{b} + 2\vec{c}))\vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{a} = (4, -7, 6)$, $\vec{b} = (3, 4, -8)$ и $\vec{c} = (7, 2, 1)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (80, 6, -9)$.
3. Векторы \vec{a} и \vec{b} ортогональны, вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 6$, вычислить скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$.
4. Выяснить, лежат ли точки $A(7, -1, 1)$, $B(-6, 1, 0)$, $C(3, -1, 3)$, $D(8, -1, -2)$ в одной плоскости.
5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (1, -3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 5)$ и $\vec{b}_1 = (4, -2)$, $\vec{b}_2 = (3, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.
6. На плоскости задан базис (\vec{b}_1, \vec{b}_2) с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.
7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3$.
8. Даны уравнения параллельных прямых $5x + 3y - 13 = 0$ и $5x + 3y - 1 = 0$. Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(AC) : 19x + 50y - 4 = 0$, $(BC) : 31x + 81y + 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.
10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(BC) : 16x + 43y + 22 = 0$, $(CD) : 15x + 38y + 16 = 0$, $(DA) : 19x + 50y - 4 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.
11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 10 = 0$ и $4x - 3y - 30 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x - 4y + 3z - 7 = 0$, $3x + 5y - 7z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, 4, 6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. Определить, при каких значениях ℓ, m плоскость $5x + \ell y + 4z + m = 0$ проходит через прямую $\begin{cases} 3x - 7y + z - 3 = 0, \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

14. Найти точку, симметричную $M(1, 2, -3)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+8}{5} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{2}$.

15. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1, 3)$ и $C(6, 2)$. Составить уравнения его сторон.