Часть III. Квадрики

§13. Квадрики в пространстве

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

13.1. Определение квадрики в пространстве

Определения

Алгебраическим уравнением второй степени с тремя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (1)$$

где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не все равны нулю.

Квадрикой в пространстве называется геометрический образ уравнения (1) относительно фиксированной аффинной системы координат.

Примером квадрики в пространстве может служить сфера с центром в точке $C(x_C, y_C, z_C)$ радиуса R, заданная уравнением $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = R^2$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат, рассмотренная в п. 7.1 Очевидно, что уравнение сферы легко приводится к виду (1).

13.2. Цилиндры второго порядка

Определение

Цилиндрической поверхностью называется множество всех точек всевозможных прямых, коллинеарных фиксированному вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$ и проходящих через все точки некоторой линии ℓ. Эта линия называется *направляющей*, а любая прямая, коллинеарная вектору $\vec{a}$ и лежащая на цилиндрической поверхности — *образующей* этой поверхности.

Из определения цилиндрической поверхности следует, что она имеет направляющую, лежащую в некоторой плоскости. В качестве такой направляющей можно взять пересечение цилиндрической поверхности с некоторой плоскостью, перпендикулярной к образующим этой поверхности.

Уравнение цилиндрической поверхности (1)

Теорема 13.1

Для любой цилиндрической поверхности существует прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, относительно которой эта поверхность задается уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим цилиндрическую поверхность σ с направляющей ℓ и образующими, коллинеарными вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$. На ℓ выберем точку O и возьмем орт $\vec{k} \parallel \vec{a}$. Возьмем произвольный орт $\vec{i}$ такой, что $\vec{i} \perp \vec{k}$ и положим $\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$ (см. рис. 13.1 на следующем слайде).

Рассмотрим плоскость π, проходящую через точку O, для которой вектор $\vec{k}$ будет нормальным вектором. Очевидно, что $\vec{i} \parallel \pi$ и $\vec{j} \parallel \pi$. Пусть кривая ℓ_1 — сечение поверхности σ плоскостью π. Возьмем в плоскости π прямоугольную декартовую систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ и пусть в этой системе координат кривая ℓ_1 задается уравнением $F(x, y) = 0$. Покажем, что в прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ пространства поверхность σ будет задаваться уравнением $F(x, y) = 0$.

Уравнение цилиндрической поверхности (2)

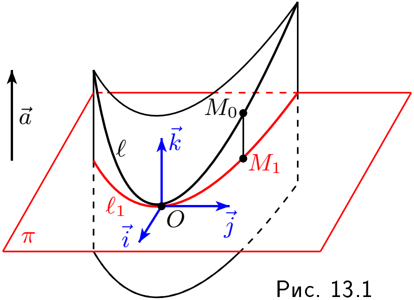

Рис. 13.1

Итак, зафиксируем систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$ и образующая, проходящая через точку M_0, пересекает ℓ_1 в точке $M_1(x_0, y_0, 0)$. Т. е. $F(x_0, y_0) = 0$. Следовательно, координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению (2).

Обратно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка пространства такая, что её координаты удовлетворяют уравнению (2), т. е. $F(x_0, y_0) = 0$. Опустим перпендикуляр из точки M_0 на плоскость π. Его основание $M_1(x_0, y_0, 0) \in \ell_1$, следовательно, этот перпендикуляр — образующая σ и, значит, $M_0 \in \sigma$.

Цилиндры второго порядка

Следствие. Если в уравнении поверхности в прямоугольной декартовой системе координат отсутствует какая-либо переменная, то это уравнение определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой в соответствующей координатной плоскости определяется уравнением поверхности, а образующие параллельны оси координат, отвечающей отсутствующему неизвестному.

Определение

Цилиндром 2-го порядка называется цилиндрическая поверхность, у которой направляющая является квадрикой на плоскости, а образующие перпендикулярны этой плоскости.

Определение

Эллиптическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве (см. рис. 13.2).

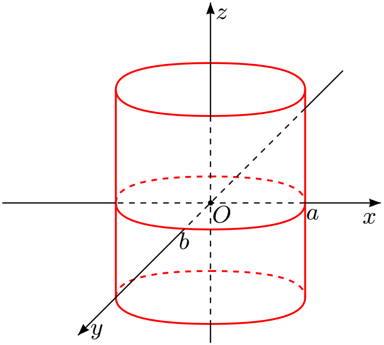

Рис. 13.2. Эллиптический цилиндр

Гиперболический цилиндр

Определение

Гиперболическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве (см. рис. 13.3).

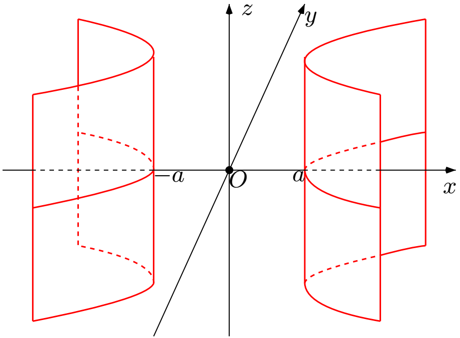

Рис. 13.3. Гиперболический цилиндр

Параболический цилиндр

Определение

Параболическим цилиндром называется геометрический образ уравнения $y^2 = 2px$ в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в пространстве.

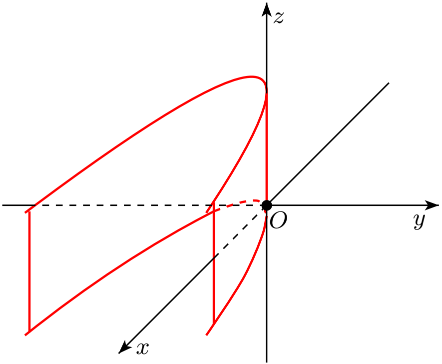

Рис. 13.4. Параболический цилиндр

Вырожденные цилиндры второго порядка

Кроме перечисленных выше эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров к цилиндрам 2-го порядка формально относятся геометрические образы уравнений

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара пересекающихся плоскостей* $\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0$.
- $x^2 = a^2$ — *пара параллельных плоскостей* $x = \pm a$.
- $x^2 = 0$ — *пара совпадающих плоскостей* $x = 0$.
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *прямая* $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — *пустое множество*.
- $x^2 = -a^2$ — *пустое множество*.

Здесь всюду $a > 0$, $b > 0$.

13.3. Конус второго порядка

Определение

Конической поверхностью называется множество всех точек всевозможных прямых, проходящих через каждую точку фиксированной кривой ℓ и фиксированную точку C, не лежащую на ℓ. При этом кривая ℓ называется *направляющей*, точка C — *вершиной*, а любая прямая, проходящая через вершину C и точку на направляющей ℓ — *образующей* конической поверхности.

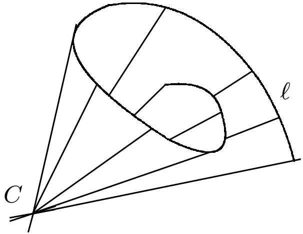

Рис. 13.5. Коническая поверхность

Определение

Конусом 2-го порядка называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ (a, b, c > 0) \tag{3}$$

в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Теорема 13.2

Конус 2-го порядка является конической поверхностью с вершиной в начале координат и направляющей ℓ, заданной уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть σ — коническая поверхность с вершиной в начале координат и направляющей ℓ, заданной уравнениями (4). Покажем, что координаты любой точки σ удовлетворяют уравнению (3). Вершина конуса $O(0,0,0)$ очевидно лежит на конусе 2-го порядка, заданного уравнением (3). Пусть теперь отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$.

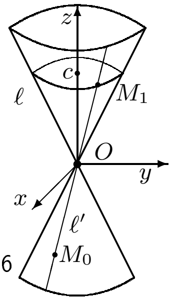

Рис. 13.6

Запишем параметрические уравнения образующей ℓ', проходящей через точки O и M_0:

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Пусть точка $M_1(x_1, y_1, c)$ — пересечение прямой ℓ' и плоскости $z = c$.
В этом случае
$c = z_0 t$ и, поскольку $c > 0$, то $z_0 \neq 0$.
Тем самым
$t = \dfrac{c}{z_0}$, откуда $x_1 = \dfrac{x_0 c}{z_0}$, $y_1 = \dfrac{y_0 c}{z_0}$.

Конус второго порядка (3)

Поскольку точка M_1 лежит на направляющей ℓ, то из (4) следует, что $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$, т. е. $\dfrac{x_0^2 c^2}{z_0^2 a^2} + \dfrac{y_0^2 c^2}{z_0^2 b^2} = 1$. Умножив обе части этого равенства на $\dfrac{z_0^2}{c^2}$, получим $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = \dfrac{z_0^2}{c^2}$, т. е. точка M_0 лежит на конусе 2-го порядка, заданного уравнением (3).

Обратно, пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \neq O(0,0,0)$ лежит на конусе 2-го порядка, заданного уравнением (3). Покажем, что она принадлежит конической поверхности σ с вершиной в начале координат и направляющей ℓ, заданной уравнениями (4). Имеем $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - \dfrac{z_0^2}{c^2} = 0$ и $z_0 \neq 0$. Прямая ℓ', проходящая через точки O и M_0, имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t \end{cases}$$

и пересекает плоскость $z = c$ в точке $M_1(x_1, y_1, c)$, где $x_1 = \dfrac{x_0 c}{z_0}$, $y_1 = \dfrac{y_0 c}{z_0}$.

Тогда

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_0^2c^2}{z_0^2a^2}+\frac{y_0^2c^2}{z_0^2b^2}=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)\frac{c^2}{z_0^2}=\frac{z_0^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{z_0^2}=1.$$

Это означает, что точка M_1 лежит на направляющей ℓ, а прямая ℓ' соединяет вершину конической поверхности σ с точкой её направляющей, т. е. является образующей σ, а значит целиком лежит на конической поверхности σ. В частности, $M_0 \in \sigma$. $\square$

Из теоремы 13.2 следует, что конус 2-го порядка имеет следующий вид:

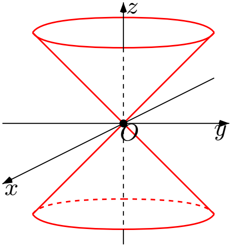

Рис. 13.7. Конус 2-го порядка

13.4. Эллипсоид

Определение

Эллипсоидом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{5}$$

где $a, b, c > 0$, в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму эллипсоида *методом сечений*. Это означает, что мы изучаем сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxy, Oxz, Oyz.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

В плоскости $z = h$ получается кривая с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}$.

При $|h| > c$ получается пустое множество, при $|h| = c$ — точки $(0, 0, \pm c)$, называемые *вершинами* эллипсоида, при $|h| < c$ — эллипс

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{c^2-h^2}}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{c^2-h^2}}{c}\right)^2} = 1.$$

В частности, при $h = 0$ получается эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Аналогично строятся сечения плоскостями $x = h$ и $y = h$. В результате получаем, что эллипсоид ограничен параллелепипедом $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$, касается граней этого параллелепипеда в вершинах $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ и имеет форму, представленную на рис. 13.8 на следующем слайде.

Эллипсоид (3)

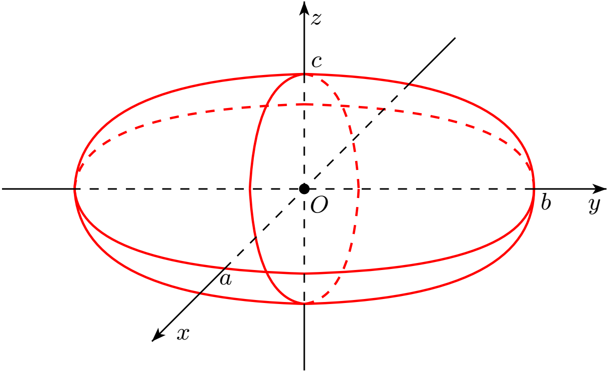

Рис. 13.8. Эллипсоид

13.5. Гиперболоиды

Определение

Однополостным гиперболоидом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6}$$

где $a, b, c > 0$, в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму однополостного гиперболоида методом сечений. Рассмотрим его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

В плоскости $z = h$ получается кривая с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}$

Однополостный гиперболоид (2)

Это эллипс
$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{c^2+h^2}}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{c^2+h^2}}{c}\right)^2}=1.$$
В частности, в плоскости $z=0$ получаем эллипс с уравнением
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
называемый *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида.

Сечение плоскостью $x=h$, параллельной координатной плоскости Oyz, определяется системой уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=h.\end{cases}$$

В плоскости $x=h$ получается кривая с уравнением $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}$

Однополостный гиперболоид (3)

При $|h| < a$ получаем гиперболу

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{a^2-h^2}}{a}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{c\sqrt{a^2-h^2}}{a}\right)^2} = 1.$$

При $|h| > a$ получаем (сопряжённую) гиперболу

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{c\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)^2} = -1.$$

При $h = a$ получаем пару пересекающихся прямых $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

Сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, рассматриваются аналогично сечению плоскостью $x = h$. В результате получаем, что однополостный гиперболоид имеет форму, представленную на рис. 13.9 на следующем слайде.

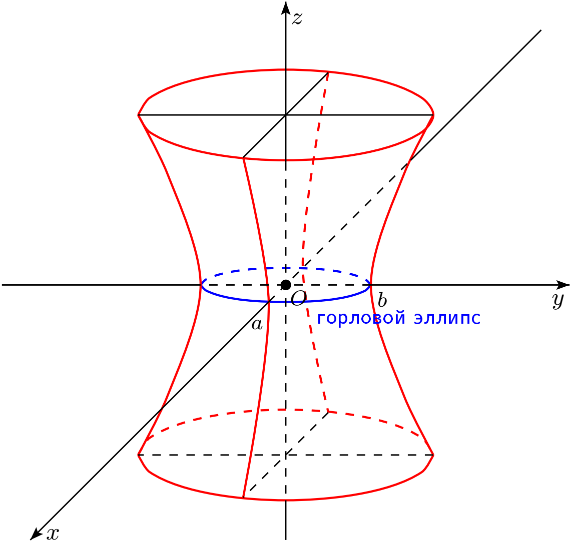

Рис. 13.9. Однополостный гиперболоид

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{7}$$

где $a, b, c > 0$, в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму двуполостного гиперболоида методом сечений. Рассмотрим его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy. Это сечение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h. \end{cases}$$

В плоскости $z = h$ получаем кривую с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1$.

При $|h| > c$ получается эллипс

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{h^2-c^2}}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{h^2-c^2}}{c}\right)^2} = 1.$$

При $|h| = c$ получаются точки $(0, 0, \pm c)$, называемые вершинами двуполостного гиперболоида.
При $|h| < c$ получается пустое множество, т. е. в этом случае плоскость $z = h$ не пересекает двуполостный гиперболоид.

Рассмотрим его сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz. Это сечение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = h. \end{cases}$$

В плоскости $x = h$ получаем кривую с уравнением $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 - \dfrac{h^2}{a^2}$.

Двуполостный гиперболоид (3)

Это (сопряжённая) гипербола

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{a^2+h^2}}{a}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{c\sqrt{a^2+h^2}}{a}\right)^2} = -1.$$

В частности, в сечении плоскостью Oyz с уравнением $x = 0$ получаем (сопряжённую) гиперболу

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Исследование сечений плоскостями $y = h$ проводится аналогично исследованию сечений плоскостями $x = h$. В результате получаем, что двуполостный гиперболоид имеет форму, представленную на рис. 13.10 на следующем слайде.

Двуполостный гиперболоид (4)

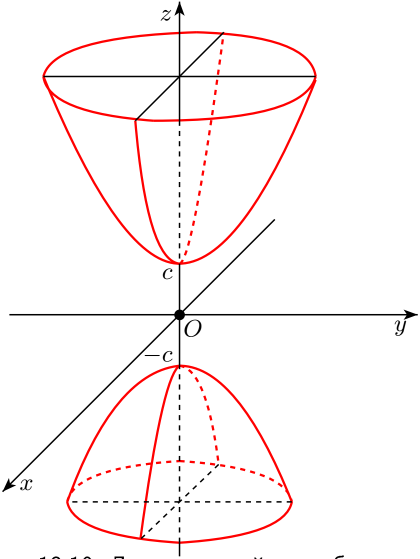

Рис. 13.10. Двуполостный гиперболоид

13.6. Параболоиды

Определение

Эллиптическим параболоидом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{8}$$

где $a, b > 0$, в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму эллиптического параболоида методом сечений. Его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy, определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases}$$

В плоскости $z = h$ получаем кривую с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2h.$

Эллиптический параболоид (2)

При $h > 0$ получается эллипс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{2h}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{2h}\right)^2} = 1.$$

При $h = 0$ получается точка $(0, 0, 0)$, называемая *вершиной* эллиптического параболоида.
При $h < 0$ получается пустое множество, т. е. в этом случае плоскость $z = h$ не пересекает эллиптический параболоид.

Теперь рассмотрим сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, которое определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases}$$

В плоскости $x = h$ получаем параболу с уравнением $y^2 = 2b^2\left(z - \dfrac{h^2}{2a^2}\right)$, ветви которой направлены вверх.

В частности, в сечении координатной плоскостью Oyz с уравнением $x = 0$ получается парабола $y^2 = 2b^2 z$.

Исследование сечений плоскостями $y = h$ проводится аналогично исследованию сечений плоскостями $x = h$. В результате получаем, что двуполостный гиперболоид имеет форму, представленную на рис. 13.11.

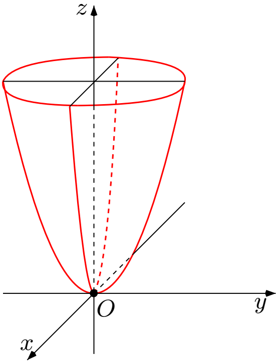

Рис. 13.11. Эллиптический параболоид

Гиперболический параболоид (1)

Определение

Гиперболическим параболоидом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{9}$$

где $a, b > 0$, в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Исследуем форму гиперболического параболоида методом сечений. Его сечение плоскостью $z = h$, параллельной координатной плоскости Oxy, определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases}$$

В плоскости $z = h$ получаем кривую с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2h$.

При $h > 0$ получается гипербола

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{2h}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{2h}\right)^2} = 1.$$

При $h < 0$ получается сопряжённая гипербола

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{-2h}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{-2h}\right)^2} = -1.$$

При $h = 0$ получается пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Теперь рассмотрим сечение плоскостью $x = h$, параллельной координатной плоскости Oyz, которое определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases}$$

Гиперболический параболоид (3)

В плоскости $x = h$ получаем параболу $y^2 = -2b^2 \left(z - \dfrac{h^2}{2a^2} \right)$, ветви которой направлены вниз. В частности, в сечении координатной плоскостью Oyz с уравнением $x = 0$ получается парабола $y^2 = -2b^2 z$.

Наконец, рассмотрим сечение плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz, которое определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases}$$

В плоскости $y = h$ получаем параболу $x^2 = 2a^2 \left(z + \dfrac{h^2}{2b^2} \right)$, ветви которой направлены вверх. В частности, в сечении координатной плоскостью Oxz с уравнением $y = 0$ получается парабола $x^2 = 2a^2 z$.

В результате получаем, что однополостный гиперболоид имеет форму, представленную на рис. 13.12 на следующем слайде. Можно сказать, что эта поверхность имеет форму седла.

Гиперболический параболоид (4)

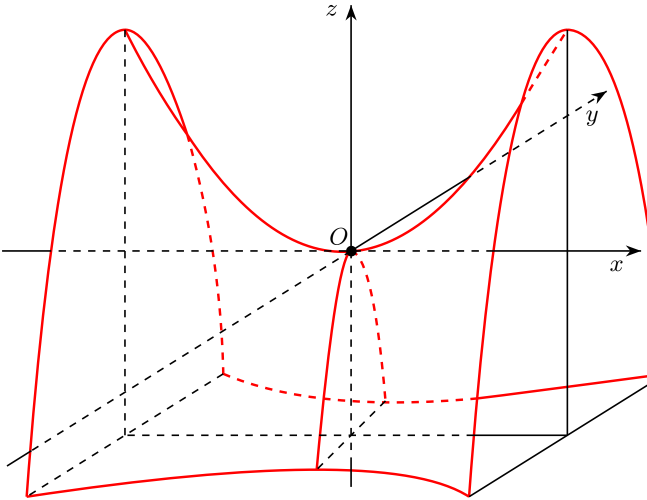

Рис. 1. Гиперболический параболоид

13.7. Классификация квадрик в пространстве

В предыдущих пунктах были рассмотрены цилиндрические поверхности 2-го порядка, конус 2-го порядка, эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды. Приведем еще два не рассмотренных ранее примера квадрик в пространстве.

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ — точка $(0,0,0)$,
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ — пустое множество.

(здесь $a,b,c>0$). Оказывается никаких других квадрик в пространстве не существует.

Теорема 13.3 (классификация квадрик в пространстве)

Любая квадрика в пространстве может быть только поверхностью одного из следующих видов: эллипсоид, гиперболоид (однополостный или двуполостный), параболоид (эллиптический или гиперболический), конус 2-го порядка, цилиндр (эллиптический, гиперболический или параболический), пара плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих), прямая, точка или пустое множество.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 12.1.

Шаг 1. Цель шага 1 — избавиться от произведений неизвестных xy, xz, yz в общем уравнении квадрики (1). Это делается за счёт замены ортонормированного базиса исходной прямоугольной декартовой системы координат на другой специально подобранный ортонормированный базис. Делается это при помощи процедуры, которая называется «приведение вещественной квадратичной формы к главным осям», которую вы изучите в курсе линейной алгебры. Пока примем тот факт, что это можно сделать, без доказательства.

Шаг 2 производится аналогично шагу 2 теоремы 12.1. Его цель — переносом начала координат в новую точку избавиться от линейных членов тех переменных, квадраты которых входят в уравнение квадрики с ненулевыми коэффициентами, используя выделение полного квадрата.

Шаг 3 тоже производится аналогично шагу 3 теоремы 12.1. Его цель — переносом начала координат в новую точку избавиться от свободного члена, если в уравнении присутствует переменная в первой степени, квадрат которой не входит в уравнение. После этого уравнение преобразуется к каноническому виду. $\square$

Классификация квадрик в пространстве. По типу канонических уравнений квадрики в пространстве, как и на плоскости, можно разделить на три типа (далее во всех уравнениях $a, b, c, p > 0$).

I. Эллиптический тип (в каноническом уравнении квадраты всех переменных с ненулевыми коэффициентами одного знака).

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — точка,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — пустое множество.

II. Гиперболический тип (в каноническом уравнении квадраты всех переменных с ненулевыми коэффициентами разных знаков).

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — конус 2-го порядка.

Типы канонических уравнений квадрик в пространстве (1)

III. Параболический тип (в каноническом уравнении квадрат как минимум одной из переменных отсутствует).

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ — эллиптический параболоид,
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр,
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — прямая,
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — пустое множество,
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ — гиперболический параболоид,
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ или $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — гиперболический цилиндр,
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — пара пересекающихся плоскостей,
- $y^2=2px$ — параболический цилиндр,
- $x^2=a^2$ — пара параллельных плоскостей,
- $x^2=0$ — пара совпадающих плоскостей,
- $x^2=-a^2$ — пустое множество.

13.8. Прямолинейные образующие

Определение

Прямая, целиком лежащая на поверхности, называется *прямолинейной образующей* этой поверхности.

Прямолинейные образующие по определению имеют цилиндрические и конические поверхности, в частности, эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры и конус 2-го порядка.

При исследовании форм квадрик в пространстве было показано, что прямолинейные образующие есть у однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Достаточно просто установить, что эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид не имеют прямолинейных образующих.

Действительно, эллипсоид, заданный уравнением (5), не имеет прямолинейных образующих, потому что он целиком расположен внутри параллелепипеда, задаваемого неравенствами $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ и $|z| \leqslant c$.

Для двуполостного гиперболоида, заданного уравнением (7), если прямая компланарна плоскости xOy, то она лежит в плоскости, задаваемой уравнением $z = h$ для некоторого h. Но, как мы видели в п. 13.5, сечение двуполостного гиперболоида плоскостью вида $z = h$ является либо эллипсом, либо точкой, либо пустым множеством. В любом случае это сечение не содержит никакой прямой. Если же прямая не компланарна плоскости xOy, то она пересекает плоскость $z = h$ для $|h| < c$, и не может лежать на двуполостном гиперболоиде, так как он не пересекает указанную плоскость.

Аналогично проверяется отсутствие прямолинейных образующих у эллиптического параболоида, заданного уравнением (8). Надо только рассмотреть произвольную плоскость, заданную уравнением $z = h$, где $h < 0$).

Далее покажем, что через каждую точку однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида проходят ровно две различные прямолинейные образующие.

Теорема 13.4

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят ровно две различные прямолинейные образующие.

Доказательство. Пусть однополостный гиперболоид σ задается уравнением (6) и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$. Рассмотрим вектор $\vec{a} = (p, q, r) \neq \vec{0}$ и потребуем, чтобы прямая, проходящая через M_0 с направляющим вектором $\vec{a}$, была прямолинейной образующей σ. Эта прямая будет задаваться параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt. \end{cases} \qquad (10)$$

Любая точка этой прямой принадлежит σ, следовательно,

$$\frac{(x_0 + pt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + qt)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + rt)^2}{c^2} = 1.$$

Представим левую часть этого равенства как многочлен от t.

Получим

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)+2\left(\frac{px_0}{a^2}+\frac{qy_0}{b^2}-\frac{rz_0}{c^2}\right)t+\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-\frac{r^2}{c^2}\right)t^2=1.$$

Поскольку это равенство выполняется для любого $t \in \mathbb{R}$, то в правой и левой частях стоят одинаковые многочлены, а значит коэффициенты при соответствующих степенях t у них равны. В силу того, что $M_0 \in \sigma$, уже имеет место равенство $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$. Значит, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} \dfrac{px_0}{a^2}+\dfrac{qy_0}{b^2}-\dfrac{rz_0}{c^2}=0, \\ \dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}-\dfrac{r^2}{c^2}=0. \end{cases} \tag{11}$$

Из второго уравнения (11) следует, что $r \neq 0$. Поэтому без ограничения общности возьмем $r=c$ и получим

$$\begin{cases} \dfrac{px_0}{a^2}+\dfrac{qy_0}{b^2}=\dfrac{z_0}{c}, \\ \dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=1. \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим точку $M_1(x_1, y_1, 0)$ на образующей, определенной уравнениями (17). Значение параметра для этой точки $t = -\dfrac{z_0}{c}$, откуда

$$x_1 = x_0 - \frac{pz_0}{c}, \quad y_1 = y_0 - \frac{qz_0}{c}. \tag{13}$$

Вычислим с учётом равенств (12) и (13) и того, что $M_0 \in \sigma$,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{\left(x_0 - \frac{pz_0}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_0 - \frac{qz_0}{c}\right)^2}{b^2} =$$

$$= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 2\left(\frac{px_0}{a^2} + \frac{qy_0}{b^2}\right)\frac{z_0}{c} + \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)\frac{z_0^2}{c^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} - 2\frac{z_0^2}{c^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Это подтверждает тот факт, что M_1 лежит на горловом эллипсе σ. В частности, x_1, y_1 не все равны нулю. Также, т. к. M_1 лежит на нашей прямолинейной образующей, то для нее будут справедливы равенства (12), в частности $\dfrac{px_1}{a^2} + \dfrac{qy_1}{b^2} = 0$, откуда $\dfrac{p}{q} = -\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$. Положим

$$p = -\frac{a}{b} y_1 \varepsilon, \quad q = \frac{b}{a} x_1 \varepsilon, \tag{14}$$

где ε — множитель пропорциональности.

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (4)

Второе равенство из (12) дает

$$1 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = \left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}\right)\varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

Тем самым $\varepsilon = \pm 1$. То есть через точку M_0 проходит ровно две прямолинейные образующие. Далее запишем параметрические уравнения этих образующих через координаты точки M_0. Из (13) получим равенства

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{az_0\varepsilon}{bc} y_1 = x_0, \\ \dfrac{bz_0\varepsilon}{ac} x_1 + y_1 = y_0. \end{cases} \tag{15}$$

Посмотрим на равенства (15) как на систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x_1, y_1 и решим её, воспользовавшись теоремой Крамера. Вычислим определитель основной матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{az_0\varepsilon}{bc} \\ \dfrac{bz_0\varepsilon}{ac} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \neq 0.$$

Вспомогательные определители системы (15) равны

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_0 & -\dfrac{az_0\varepsilon}{bc} \\ y_0 & 1 \end{vmatrix} = x_0 + \frac{az_0\varepsilon}{bc} y_0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ \dfrac{bz_0\varepsilon}{ac} & y_0 \end{vmatrix} = y_0 - \frac{bz_0\varepsilon}{ac} x_0.$$

Тем самым две различные прямолинейные направляющие пересекают горловой эллипс в точках

$$\left(\frac{x_0 + \frac{az_0\varepsilon}{bc} y_0}{\Delta}, \frac{y_0 - \frac{bz_0\varepsilon}{ac} x_0}{\Delta} \right)$$

и имеют, соответственно, направляющие векторы с координатами

$$p = -\frac{a}{b} y_1 \varepsilon = \frac{-\frac{y_0\varepsilon}{b} + \frac{x_0 z_0}{ac}}{\Delta} \cdot a, \quad q = \frac{b}{a} x_1 \varepsilon = \frac{\frac{x_0\varepsilon}{a} + \frac{y_0 z_0}{bc}}{\Delta} \cdot b, \quad r = c,$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (6)

Теперь мы можем записать параметрические уравнения двух различных прямолинейных образующих, проходящих через точку M_0 однополостного гиперболоида σ.

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{-\varepsilon \frac{y_0}{b} + \frac{x_0 z_0}{ac}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot at \\ y = y_0 + \dfrac{\varepsilon \frac{x_0}{a} + \frac{y_0 z_0}{bc}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}} \cdot bt \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \tag{16}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. □

Следствие. Если точка $M_0(x_0, y_0, 0)$ лежит на горловом эллипсе однополостного гиперболоида, заданного уравнениями (6), то в этом случае с учетом $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ прямолинейные образующие, проходящие через M_0 будут задаваться уравнениями (см. следующий слайд)

$$\begin{cases} x = x_0 - \varepsilon \dfrac{y_0}{b} \cdot at, \\ y = y_0 + \varepsilon \dfrac{x_0}{a} \cdot bt, \\ z = ct, \end{cases}$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Теорема 13.5

Через каждую точку гиперболического параболоида проходят ровно две различные прямолинейные образующие.

Доказательство. Пусть гиперболический параболоид σ задается уравнением (9) и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$. Рассмотрим вектор $\vec{a} = (p, q, r) \neq \vec{0}$ и потребуем, чтобы прямая, проходящая через M_0 с направляющим вектором $\vec{a}$ была прямолинейной образующей σ. Эта прямая будет задаваться параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt. \end{cases} \tag{17}$$

Любая точка этой прямой принадлежит σ, следовательно,

$$\frac{(x_0+pt)^2}{a^2}-\frac{(y_0+qt)^2}{b^2}=2(z_0+rt).$$

Представим обе части этого равенства как многочлены от t.

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+2\left(\frac{px_0}{a^2}-\frac{qy_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}\right)t^2=2z_0+2rt.$$

Поскольку это равенство выполняется для любого $t\in\mathbb{R}$, то в правой и левой частях стоят одинаковые многочлены, а значит коэффициенты при соответствующих степенях t у них равны. В силу того, что $M_0\in\sigma$, уже имеет место равенство $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=2z_0$. Значит, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases}\dfrac{px_0}{a^2}-\dfrac{qy_0}{b^2}=r,\\[2mm] \dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=0.\end{cases}\tag{18}$$

Второе равенство из (18) дает $\dfrac{p}{q} = \pm\dfrac{a}{b}$. Положим $p = a$, $q = \varepsilon b$, где $\varepsilon = \pm 1$. Из первого равенства системы (18) получим $r = \dfrac{x_0}{a} - \varepsilon\dfrac{y_0}{b}$. Тем самым, через точку M_0 проходят ровно две различные прямолинейные образующие, заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + \varepsilon bt, \\ z = z_0 + \left(\dfrac{x_0}{a} - \varepsilon\dfrac{y_0}{b}\right)t, \end{cases}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. $\square$