Часть III. Квадрики

§12. Классификация квадрик на плоскости

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Ещё примеры квадрик на плоскости

Напомним (см. определение в п. 9.1), что квадрикой на плоскости называется геометрический образ уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} не все равны 0, в некоторой аффинной системе координат.

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что система координат прямоугольная декартовая.

Примерами квадрик на плоскости могут служить эллипс, гипербола и парабола, рассмотренные в §9—11. Рассмотрим еще несколько примеров.

1. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает *пару пересекающихся прямых* $y = \pm x$.
2. Уравнение $x^2 = 1$ задает *пару параллельных прямых* $x = \pm 1$.
3. Уравнение $x^2 = 0$ задает прямую $x = 0$, которую в этом случае называют *парой совпадающих прямых*.
4. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает *точку* $O(0, 0)$.
5. Уравнения $x^2 = -1$ и $x^2 + y^2 = -1$ задают *пустое множество*.

Оказывается, никаких других квадрик на плоскости не существует.

Классификация квадрик на плоскости (1)

Теорема 12.1 (классификация квадрик на плоскости)

Всякая квадрика на плоскости представляет собой одно из следующих множеств точек: эллипс, гипербола, парабола, пара прямых (пересекающихся, параллельных или совпадающих), точка или пустое множество.

Доказательство. Описанную в доказательстве процедуру называют *приведением уравнения квадрики к каноническому виду*. Проведем доказательство в три шага.

Шаг 1. Повернем координатные оси на некоторый угол α так, чтобы в повернутой системе координат уравнение квадрики не имело бы слагаемого с xy. если в исходно уравнении его уже нет, т. е. $a_{12} = 0$, то этот шаг следует пропустить. Поэтому будем полагать, что $a_{12} \neq 0$
По формулам поворота координатных осей на угол α (утверждение 5.8)

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases}$$

Рассмотрим квадратичную форму старших членов уравнения (1)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 +$$
$$+ 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2.$$

Выпишем из этого выражения коэффициент при $x'y'$ и приравняем его к нулю:

$$2a'_{12} = -2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2a_{22}\cos\alpha\sin\alpha =$$
$$= (a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha = 0.$$

Получим уравнение для нахождения угла α:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \qquad (2)$$

Очевидно, что это уравнение всегда имеет решение.

Далее покажем, что при повороте на угол α, являющийся решением уравнения (2), уравнение кривой останется алгебраическим уравнением 2-го порядка, т. е. что $a'_{11} \neq 0$ или $a'_{22} \neq 0$.

Классификация квадрик на плоскости (2)

От противного, пусть

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 0$$
$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\cos^2\alpha = 0.$$

Сложив эти уравнения, мы получим $a_{11} + a_{22} = 0$ или $a_{22} = -a_{11}$, откуда $a'_{11} = a_{11}\cos 2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha = 0$. Кроме того, из $a_{22} = -a_{11}$ следует $2a'_{12} = -2a_{11}\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha = 0$. Иными словами

$$\begin{cases} a_{11}\cos 2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha = 0, \\ -a_{11}\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотри (3) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_{11}, a_{12}. Найдем определитель основной матрицы системы (3):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1.$$

Таким образом, по теореме Крамера система (3) имеет единственное решение $a_{11} = a_{12} = 0$. При этом $a_{22} = -a_{11} = 0$. Но в исходном уравнении (1) коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не все равны 0. Полученное противоречие показывает, что поворот системы координат на угол α снова приводит к уравнению квадрики.

Классификация квадрик на плоскости (3)

Шаг 2. На этом этапе будем считать, что мы уже имеем дело с уравнением без произведения переменных, т. е. с уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{4}$$

Теперь мы перенесем начало координат в новую точку так, чтобы избавиться от линейного члена переменной, квадрат которой отличен от 0.

Без ограничения общности пусть $a_{11} \neq 0$. Выделим полный квадрат, который будет содержать все слагаемые из (4) с переменной x:

$$a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}} + \frac{a_1^2}{a_{11}^2}\right) - \frac{a_1^2}{a_{11}} + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_1^2}{a_{11}} + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0$$

Перенесем начало координат в точку $O'\left(-\dfrac{a_1}{a_{11}}, 0\right)$ преобразованием

$$\begin{cases} x = x' - \frac{a_1}{a_{11}}, \\ y = y'. \end{cases}$$

В результате мы получим уравнение квадрики в новой системе координат

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_2y' + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_{11}}$. Если $a_{22} \neq 0$, то можно избавиться в (4) от слагаемого $2a_2y$ аналогичным образом. Тем самым мы можем считать, что после переноса начала координат на шаге 2 мы будем иметь дело с уравнением одного из следующих типов:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0 \ (A \neq 0,\ B \neq 0), \tag{5}$$

$$Dx^2 + 2Ey + F = 0 \ (D \neq 0), \tag{6}$$

$$Dy^2 + 2Ex + F = 0 \ (D \neq 0). \tag{7}$$

Шаг 3. Рассмотрим эти уравнения. Понятно, что уравнения типов (6) и (7) рассматриваются одинаково. Тем самым мы имеем два случая:

- Случай 1. Уравнение типа (5).
- Случай 2. Уравнение типа (6) или (7).

Случай 1. Уравнение типа (5) $Ax^2+By^2+C=0$, $(A\neq 0,\ B\neq 0)$.

1.1. $C\neq 0$. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Если $-\dfrac{C}{A}>0$, $-\dfrac{C}{B}>0$, положим $a^2=-\dfrac{C}{A}$, $b^2=-\dfrac{C}{B}$ и получим уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Если $-\dfrac{C}{A}>0$, $-\dfrac{C}{B}<0$, положим $a^2=-\dfrac{C}{A}$, $b^2=\dfrac{C}{B}$ и получим уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Если $-\dfrac{C}{A}<0$, $-\dfrac{C}{B}>0$, положим $a^2=\dfrac{C}{A}$, $b^2=-\dfrac{C}{B}$ и получим уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$.

Классификация квадрик на плоскости (5)

Если $-\dfrac{C}{A} < 0$, $-\dfrac{C}{B} < 0$, положим $a^2 = \dfrac{C}{A}$, $b^2 = \dfrac{C}{B}$ и получим уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, геометрическим образом которого является пустое множество.

1.2. $C = 0$. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{\frac{1}{A}} + \frac{y^2}{\frac{1}{B}} = 0.$$

Если A и B одного знака, без ограничения общности $A > 0$, $B > 0$, то положим $a^2 = \dfrac{1}{A}$, $b^2 = \dfrac{1}{B}$ и получим уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, геометрическим образом которого является точка $(0, 0)$.
Если A и B разных знаков, без ограничения общности $A > 0$, $B < 0$, то положим $a^2 = \dfrac{1}{A}$, $b^2 = -\dfrac{1}{B}$ и получим уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, геометрическим образом которого является пара пересекающихся прямых $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Случай 2. Рассмотрим уравнение типа (7) $Dy^2 + 2Ex + F = 0$, $(D \neq 0)$.

2.1. $E \neq 0$. Тогда можно сдвигом начала координат в новую точку избавиться от свободного члена уравнения. Запишем уравнение (7) в виде

$$Dy^2 + 2E\left(x + \frac{F}{2E}\right) = 0.$$

Сдвинем начало координат в точку $O'\left(-\frac{F}{2E}, 0\right)$ преобразованием

$$\begin{cases} x = x' - \frac{F}{2E}, \\ y = y'. \end{cases}$$

Получим уравнение в виде $D(y')^2 + 2Ex' = 0$ или $(y')^2 = -\dfrac{2E}{D}x'$.

Положим $p = -\dfrac{E}{D} \neq 0$ и получим уравнение

$$(y')^2 = 2px'.$$

Если $p > 0$, то это парабола.

Если же $p < 0$, то изменим направление оси $O'x'$ на противоположное преобразованием

$$\begin{cases} x' = -x'', \\ y' = y''. \end{cases}$$

Обозначим $p' = -p > 0$. Уравнение квадрики примет вид

$$(y'')^2 = 2p'x'' \ (p' > 0).$$

Т. е. и в этом случае геометрический образ — парабола.

2.2. $E = 0$. Т. е. уравнение (7) вид

$$y^2 = -\frac{F}{D}.$$

Если $-\dfrac{F}{D} > 0$, положим $a^2 = -\dfrac{F}{D}$. Уравнение примет вид $y^2 = a^2$, а его геометрическим образом будет пара параллельных прямых $y = \pm a$.

Если $-\dfrac{F}{D} < 0$, положим $a^2 = \dfrac{F}{D}$. Уравнение примет вид $y^2 = -a^2$, а его геометрическим образом будет пустое множество.

Если $-\dfrac{F}{D} = 0$, то уравнение примет вид $y^2 = 0$, а его геометрическим образом будет прямая $y = 0$ (которую в этом случае называют парой совпадающих прямых). $\square$

Классификация квадрик на плоскости. По типу канонических уравнений квадрики на плоскости можно разделить на три типа.

I. Эллиптический тип (в каноническом уравнении квадраты обеих переменных с ненулевыми коэффициентами одного знака).

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — точка,
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — пустое множество.

Классификация квадрик на плоскости (8)

II. Гиперболический тип (в каноническом уравнении квадраты обеих переменных с ненулевыми коэффициентами разных знаков).

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — гипербола,
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся прямых.

III. Параболический тип (в каноническом уравнении квадрат одной из переменных отсутствует).

- $y^2 = 2px$ или $x^2 = 2py$ — парабола,
- $y^2 = a^2$ или $x^2 = a^2$ — пара параллельных прямых,
- $y^2 = 0$ или $x^2 = 0$ — пара совпадающих прямых,
- $y^2 = -a^2$ или $x^2 = -a^2$ — пустое множество.

Здесь во всех канонических уравнениях $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$.