Часть III. Квадрики

§11. Парабола

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

11.1. Парабола и её характеристика

Определение

Параболой называется геометрический образ уравнения

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

где $p > 0$, в прямоугольной декартовой системе координат.

Указанная система координат называется *канонической*, а уравнение (1) называется *каноническим*.

Так как в уравнение (1) входит только квадрат переменной y, то парабола симметрична относительно координатной оси Ox. А поскольку $x = \dfrac{y^2}{2p} \geqslant 0$, то для выяснения формы параболы достаточно изучить ее в первом квадранте $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Из уравнения (1) выразим $y(x) = \sqrt{2px}$.

Очевидно, что область определения функции $y(x)$ — промежуток $x \geqslant 0$, а область значений — промежуток $y \geqslant 0$.

Форма параболы (1)

Дифференцируя $y(x)$ дважды получим

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} > 0 \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}} < 0.$$

Т. е. функция $y(x)$ возрастает на $x \geqslant a$, а её график выпуклый вверх. Посмотрим, имеется ли у параболы наклонная (или горизонтальная) асимптота.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2px}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2px} = +\infty.$$

Тем самым у параболы нет наклонной (или горизонтальной) асимптоты.

с учётом вышеизложенного можно изобразить параболу на координатной плоскости (см. рис. 11.1 на следующем слайде).

Форма параболы (2)

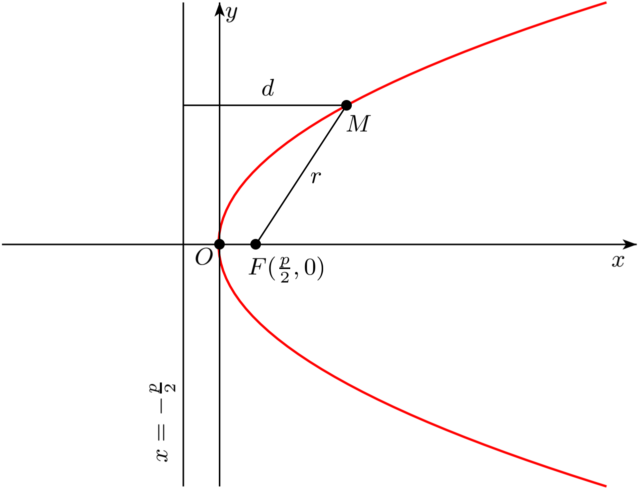

Рис. 11.1. Парабола

Элементы параболы

Определения

Точка $O(0,0)$ называется *вершиной* параболы.

Точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ называется *фокусом* параболы.

Длина отрезка, соединяющих точку параболы с его фокусом, называются *фокальным радиусом* этой точки и обозначается r.

Прямая $x=-\frac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы. Расстояние от точки параболы до директрисы называется *директориальным расстоянием* и обозначается d.

Прямая $y=0$ (ось Ox) называется *осью* параболы. Она является осью её симметрии.

Число p называется *параметром* параболы.

Очевидно, что параметр параболы p определяет форму параболы. Чем ближе p к 0, тем более сомкнуты ветви параболы. Чем больше значение p, тем более они развернуты.

Директориальное свойство параболы (1)

Теорема 11.1 (директориальное свойство параболы)

Точка M принадлежит параболе, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда
$$r = d.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ℓ — директриса параболы, а точка $M(x, y)$ принадлежит этой параболе. Поскольку $x + \dfrac{p}{2} = 0$ — общее уравнение ℓ, то $d = \left|x + \dfrac{p}{2}\right|$. Тогда
$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} =$$
$$= \left|x + \frac{p}{2}\right| = d.$$

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, такая, что $r = d$, т. е. $\sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \dfrac{p}{2}\right|$.. Возведем обе части этого равенства в квадрат, раскроем скобки и приведем подобные. Получим уравнение (1).

Директориальное свойство параболы (2)

Следствие теоремы 11.1.

Парабола — это геометрическое место точек, для которых расстояние до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой, не проходящей через эту фиксированную точку.

11.2. Касательная к параболе

Теорема 11.2

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит параболе, заданной уравнением (1). Тогда касательная к параболе в точке M_0 имеет уравнение

$$y_0 y = p(x_0 + x). \tag{2}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.3. □

Теорема 11.3. (оптическое свойство параболы)

Свет от источника, находящегося в фокусе параболы, отражается от параболы так, что отраженные лучи параллельны оси параболы.

Доказательство Пусть ℓ — касательная к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ и точка A — пересечение ℓ с осью Ox. Поскольку по теореме 11.2 ℓ имеет уравнение (2), то $A(-x_0, 0)$ (см. рис. 11.2 на следующем слайде).

Оптическое свойство параболы (2)

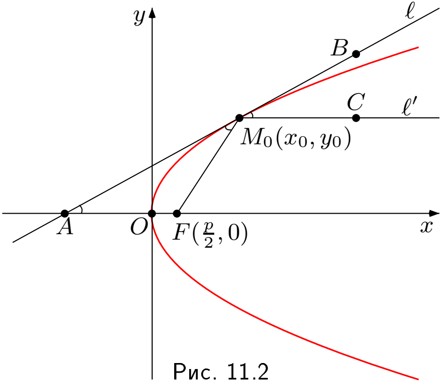

Рис. 11.2

Очевидно $|AF| = x_0 + \dfrac{p}{2}$. Однако $|FM| = x_0 + \dfrac{p}{2}$ по теореме 11.1, следовательно, $|AF| = |FM|$, т. е. $\triangle AFM_0$ равнобедренный, а значит $\angle FAM_0 = \angle FM_0A$. Проведем через M_0 прямую ℓ', параллельную оси Ox. Тогда $\angle BM_0C = \angle FAM_0$ как углы, образованные параллельными и секущей. Тем самым $\angle BM_0C = \angle FM_0A$, т. е. отраженный луч лежит на ℓ'.

11.3. «Школьная» парабола

В школьном курсе алгебры параболой называется график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Покажем, что «школьная» парабола является параболой в смысле определения п. 11.1.

Выделим полный квадрат в уравнении «школьной параболы».

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Перенесем начало координат в точку $O'\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ с помощью замены

$$\begin{cases} x = x' - \dfrac{b}{2a}, \\ y = y' + c - \dfrac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

Получим уравнение

$$y' = a(x')^2.$$

«Школьная» парабола (2)

Если $a > 0$, то поменяем оси местами (симметричное отражение относительно биссектрисы I и IV координатных углов) по формулам

$$\begin{cases} x' = y'', \\ y' = x''. \end{cases}$$

Положим $p = \dfrac{1}{2a} > 0$. Получим каноническое уравнение параболы (сравни с (1))

$$(y'')^2 = 2px''. \tag{3}$$

Если же $a < 0$, то также поменяем оси местами, после чего изменим направление оси абсцисс и по формулам

$$\begin{cases} x' = y'', \\ y' = -x''. \end{cases}$$

Положив $p = -\dfrac{1}{2a} > 0$ получим уравнение (3).

Изображение «школьной» параболы приведено на рис. 11.3 (см. следующий слайд).

«Школьная» парабола (3)

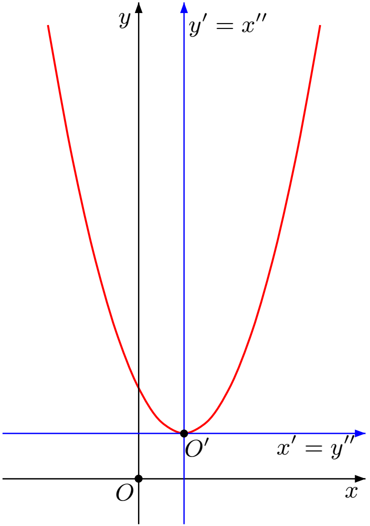

Рис. 11.3. «Школьная» парабола $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$