Часть III. Квадрики

§10. Гипербола

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

10.1. Гипербола и её характеристики

Определение

Гиперболой называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

в прямоугольной декартовой системе координат.

Указанная система координат называется *канонической*, а уравнение (1) называется *каноническим*.

Так как в уравнение (1) входят только квадраты переменных, гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат. Поэтому для выяснения формы гиперболы достаточно изучить ее в первом квадранте $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Из уравнения (1) выразим $y(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Очевидно, что область определения функции $y(x)$ — промежуток $x \geqslant a$, а область значений — промежуток $0 \leqslant y$.

Форма гиперболы (1)

Дифференцируя $y(x)$ дважды получим

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0 \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0.$$

Т. е. функция $y(x)$ возрастает на $x \geqslant a$, а её график выпуклый вверх. Рассмотрим прямую $y = \frac{b}{a}x$. Очевидно $\frac{b}{a}x > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, значит график $y(x)$ расположен ниже этой прямой. Покажем, что эта прямая — асимптота графика функции $y(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(y(x) - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{b(\sqrt{x^2 - a^2} - x)}{a} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{b(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{a(\sqrt{x^2 - a^2}) + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-ba^2}{a(\sqrt{x^2 - a^2} + x)} = 0.$$

Форма гиперболы (2)

С учётом полученных данных и симметрии гиперболы можно изобразить её на рисунке 10.1. Видно , что гипербола состоит из двух ветвей — правой и левой.

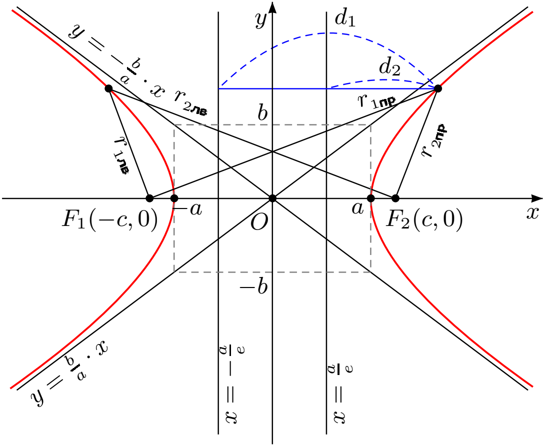

Рис. 10.1. Гипербола

Элементы гиперболы

Определения

Числа a и b называются *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Прямые с уравнениями $y = -\dfrac{b}{a}x$, $y = \dfrac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.

Точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы.

Положим $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы (*левым* и *правым* соответственно).

Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Длины отрезков, соединяющих точку на гиперболы с его фокусами, называются *фокальными радиусами* этой точки. Их обозначают $r_{1\text{пр}}$, $r_{2\text{пр}}$, если точка лежит на правой ветви, и $r_{1\text{лв}}$, $r_{2\text{лв}}$, если точка лежит на левой ветви гиперболы. Если ветвь гиперболы не уточняется, их обозначают r_1 и r_2.

Очевидно, что для гиперболы $e > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Чем ближе e к 1, тем более сомкнуты ветви гиперболы, а чем больше e, тем они более раскрыты.

Фокальные радиусы

Лемма 10.1

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит гиперболе, заданному уравнением (1). Тогда

$$\begin{aligned} r_{1\text{пр}} &= a + ex_0, & r_{1\text{лв}} &= -a - ex_0, \\ r_{2\text{пр}} &= ex_0 - a, & r_{2\text{лв}} &= a - ex_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Без ограничения общности пусть M_0 лежит на правой ветви гиперболы.

Имеем $r_{1\text{пр}} = |F_1M_0| = \sqrt{(x_0+c)^2 + y_0^2}$. Из (1) выразим $y_0^2 = \dfrac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2$.

С учётом $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = ea$ получим

$$\begin{aligned} r_{1\text{пр}}^2 &= (x_0+c)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 2x_0c + c^2 + \frac{b^2x_0^2}{a^2} - b^2 = \\ &= x_0^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2x_0c + a^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2x_0c + a^2 = \\ &= e^2x_0^2 + 2x_0ea + a^2 = (a + ex_0)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $x \geqslant a$ и $e > 1$, то $a + ex_0 > 0$, значит, $r_{1\text{пр}} = a + ex_0$.

Остальные формулы доказываются аналогично $\square$

Фокальное свойство гиперболы (1)

Следствие леммы 10.1. $r_1 = |a + ex_0|, \quad r_2 = |a - ex_0|.$

Теорема 10.1 (фокальное свойство гиперболы)

Точка M принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна из формул (2) леммы 10.1.

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости такая, что $\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a$. Запишем это равенство в координатах.

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Далее возведем обе части равенства в квадрат, затем выразим оставшийся корень и снова возведем в квадрат. Преобразуя получившееся выражение с учётом $c^2 = a^2 + b^2$ придём к уравнению (1). $\square$

Выполните недостающие выкладки в доказательстве теоремы 10.1 в качестве упражнения.

Следствие теоремы 10.1.

Гипербола — это геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний до двух различных фиксированных точек есть величина постоянная меньшая, чем расстояние между этими фиксированными точками.

Определения

Прямые $x = -\dfrac{a}{e}$ и $x = \dfrac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы (соответственно *левой* и *правой*).

Расстояния от точки M, принадлежащей эллипсу, до директрис называются *директориальными расстояниями*. Расстояние до левой директрисы обозначается d_1, а до правой — d_2 (см. рис. 10.1).

Поскольку $e > 1$, то директрисы не пересекают гиперболу, располагаясь симметрично относительно начала координат между вершинами (см. рис. 10.1). Следующая теорема проясняет геометрический смысл директрис и директориальных расстояний.

Директориальное свойство гиперболы

Теорема 10.2 (директориальное свойство гиперболы)

Точка M принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1), тогда и только тогда, когда

$$e = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим левую директрису. Её общее уравнение $x + \dfrac{a}{e} = 0$. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит гиперболе, то $d_1 = \left| x_0 + \dfrac{a}{e} \right| = \dfrac{|a + ex_0|}{e}$. Поскольку по следствию леммы 10.1 $r_1 = |a + ex_0|$, получим $d_1 = \dfrac{r_1}{e}$, откуда $e = \dfrac{r_1}{d_1}$. Равенство $e = \dfrac{r_2}{d_2}$ доказывается аналогично.

Достаточность доказывается аналогично теореме 9.2 □

Следствие теоремы 10.2.

Гипербола — это геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой, не проходящей через эту фиксированную точку, есть величина постоянная большая 1.

10.2. Касательная к гиперболе

Теорема 10.3

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит гиперболе, заданной уравнением (1). Тогда касательная к гиперболе в точке M_0 имеет уравнение

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 9.3. □

Теорема 10.4. (оптическое свойство гиперболы)

Свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается ближайшей ветвью гиперболы так, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.

Доказательство. Без ограничения общности зафиксируем на левой ветви гиперболы точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем касательную ℓ к гиперболе в этой точке. Пусть точка N — пересечение касательной с осью Ox (см. рис. 10.2).

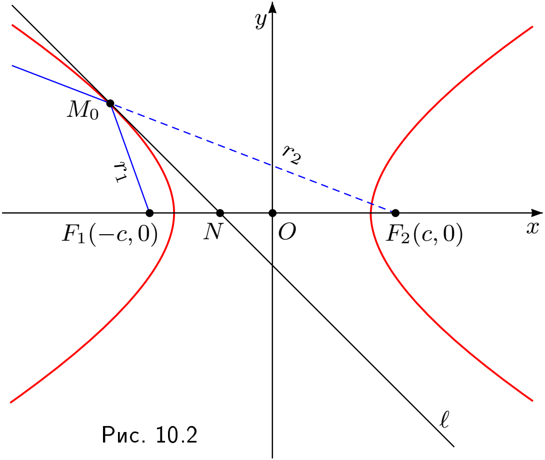

Рис. 10.2

Поскольку точка N лежит на касательной, то в силу (3) имеем $N\left(\dfrac{a^2}{x_0};\ 0\right)$.

Оптическое свойство гиперболы (3)

Т. к. $c = ea$, то с учётом следствия леммы 10.1 получаем

$$|NF_1| = \left|-c - \frac{a^2}{x_0}\right| = \left|c + \frac{a^2}{x_0}\right| = \left|\frac{eax_0 + a^2}{x_0}\right| = -\frac{a|a + ex_0|}{x_0} = -\frac{ar_1}{x_0}.$$

Аналогично находим $|NF_2| = -\dfrac{ar_2}{x_0}$. Тем самым $\dfrac{|NF_1|}{|NF_2|} = \dfrac{r_1}{r_2}$, следовательно, MN — биссектриса в $\triangle F_1MF_2$. $\square$

10.3. Сопряжённая гипербола

Определение

В прямоугольной декартовой системе координат геометрический образ уравнения
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (4)$$
называется *сопряжённой гиперболой* к гиперболе, определённой уравнением (1).

Сопряженная гипербола имеет действительную полуось b, мнимую полуось a. Её фокусы лежат на оси Oy. Параметр c тот же, что у исходной гиперболы и асимптоты те же. Изображения сопряжённой и исходной гипербол приведены на рис. 10.3, сопряжённая гипербола выделена полужирной линией.

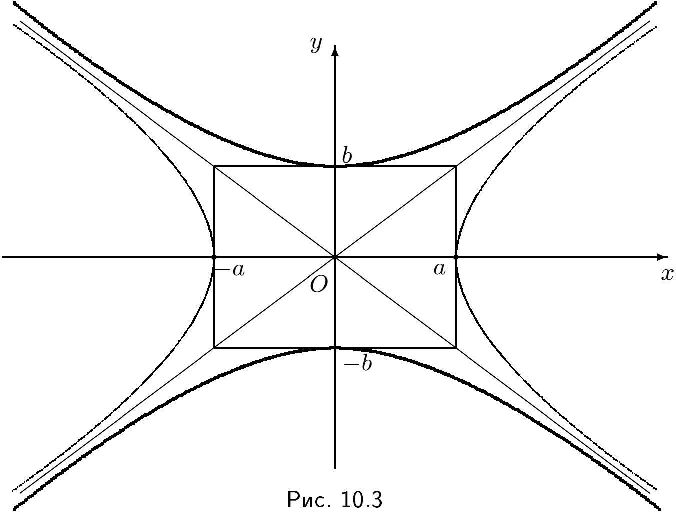

Рис. 10.3

10.4. «Школьная» гипербола

В школьном курсе алгебры гиперболой называется график функции $y = \dfrac{k}{x}$, где k — постоянное ненулевое число. Это уравнение равносильно уравнению $xy = k$. Покажем, что последнее уравнение определяет гиперболу. Повернём систему координат на угол $\dfrac{\pi}{4}$ против часовой стрелки. Формулы преобразования координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

(см. утверждение 5.3). Если в уравнение $xy = k$ подставить x и y из этих формул, то получим $k = xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \dfrac{1}{2}((x')^2 - (y')^2)$. Это означает, что в системе координат $Ox'y'$ «школьная» гипербола определяется уравнением $\dfrac{(x')^2}{|2k|} - \dfrac{(y')^2}{|2k|} = \pm 1$. Поскольку $|2k| = a^2$ для некоторого $a > 0$, получаем уравнение гиперболы при $k > 0$ и сопряжённой гиперболы при $k < 0$ (см. рис. 10.4). Полуоси у этих гипербол равны.

«Школьная» гипербола (2)

Определение

Гипербола, у которой полуоси равны, называется *равнобочной* или *равносторонней*.

Тем самым «школьная» гипербола равносторонняя.

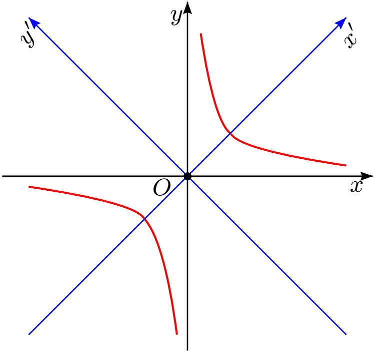

Рис. 10.4

10.5. Параметрические уравнения ветвей гиперболы

Определение

Функция $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется *гиперболическим косинусом*.

Функция $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется *гиперболическим синусом*.

Легко проверить, что

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{5}$$

Равенство (5) называется *основным гиперболическим тождеством*.

Утверждение 10.1

Пусть гипербола задана уравнением (1). Тогда уравнения

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \tag{6}$$

будут параметрическими уравнениями её правой ветви.

Параметрические уравнения ветвей гиперболы (2)

Доказательство. *Достаточность.* Если точка $M(x, y)$ такова, что для $t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства (6), то $x^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 t$ и $y^2 = b^2 \operatorname{sh}^2 t$. Следовательно, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ в силу (5), т. е. точка M принадлежит гиперболе. Поскольку функция $\operatorname{ch} x > 0$, то точка M лежит на правой ветви.

Необходимость. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на правой ветви гиперболы, заданной уравнением (1). Докажем, что $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $x_0 = a \operatorname{ch} t_0$, $y_0 = b \operatorname{sh} t_0$.

Рассмотрим равенство

$$x_0 = a \operatorname{ch} t \tag{7}$$

как уравнение относительно t. Это уравнение можно переписать в виде $\dfrac{a(e^t + e^{-t})}{2} = x_0$ или $ae^t + ae^{-t} = 2x_0$. Умножим обе части полученного равенства на e^t и перепишем полученное равенство в виде $ae^{2t} - 2x_0 e^t + a = 0$.

Параметрические уравнения ветвей гиперболы (3)

Полагая $u = e^t$, получаем квадратное уравнение относительно u:

$$au^2 - 2x_0 u + a = 0. \tag{8}$$

Его сокращённый дискриминант равен $D = x_0^2 - a^2$. Учитывая, что точка M_0 лежит на гиперболе, получаем, что $|x_0| \geqslant a$, и потому $D \geqslant 0$. Следовательно, уравнение (8) имеет по крайней мере один действительный положительный корень $u_0 = \dfrac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}$. Положим $t_0 = \ln u_0$. Тогда число t_0 является решением уравнения (7), т. е. $x_0 = a \operatorname{ch} t_0$.

Подставим этот x_0 в уравнение гиперболы (1). Получим $y_0^2 = b^2 \operatorname{sh}^2 t_0$. Если $y_0 \geqslant 0$, то получим $y_0 = b \operatorname{sh} t_0$. Если же $y_0 < 0$, то $y_0 = -b \operatorname{sh} t_0 = b \operatorname{sh}(-t_0)$ в силу нечетности гиперболического синуса. Но тогда $x_0 = a \operatorname{ch} t_0 = a \operatorname{ch}(-t_0)$ в силу четности гиперболического косинуса. □

Следствие. Левая ветвь гиперболы, заданной уравнением (1) будет иметь параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = -a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$$