Часть III. Квадрики

§9. Эллипс

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

9.1. Квадрики на плоскости

Определения

Алгебраическим уравнением второй степени с двумя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \qquad (1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} не все равны 0.

Квадрикой на плоскости называется геометрический образ уравнения (1) относительно фиксированной аффинной системы координат.

Квадрику на плоскости также называют *кривой второго порядка*.

Далее будут рассмотрены три конкретных типа таких кривых — эллипс, гипербола и парабола, а затем будет приведена полная классификация квадрик на плоскости.

В этом и всех последующих параграфах предполагается, что системы координат на плоскости и в пространстве, в которых будут записываться уравнения кривых и поверхностей, являются прямоугольными декартовыми.

9.2. Эллипс и его характеристики

Определение

Эллипсом называется геометрический образ уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

в прямоугольной декартовой системе координат.
Указанная система координат называется *канонической*, и уравнение (2) называется *каноническим*.

Заметим, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Далее будем считать, что $a > b > 0$. Так как в уравнение (2) входят только квадраты переменных, эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Поэтому для выяснения формы эллипса достаточно изучить ее в первом квадранте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

Из уравнения (2) выразим $y(x) = \dfrac{a}{b}\sqrt{a^2 - x^2}$. Очевидно, что область определения функции $y(x)$ — промежуток $0 \leqslant x \leqslant a$, а область значений — промежуток $0 \leqslant y \leqslant b$.

Дифференцируя $y(x)$ дважды получим

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0 \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0.$$

Т. е. функция $y(x)$ убывает на $0 \leqslant x \leqslant a$, а её график выпуклый вверх. Используя симметрию эллипса получим замкнутую кривую, изображенную на рис. 9.1 (см. следующий слайд).

Поскольку $a^2 - b^2 \geqslant 0$. Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Очевидно $0 \leqslant c < a$.

Определения

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$ называются *вершинами* эллипса, величина a — *большой полуосью* эллипса, а величина b — его *малой полуосью*.

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ называются *фокусами* эллипса, причем фокус F_1 называется *левым*, а фокус F_2 — *правым*.

Если точка M принадлежит эллипсу, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* и обозначаются соответственно через r_1 и r_2.

Расположение эллипса на плоскости. Эксцентриситет

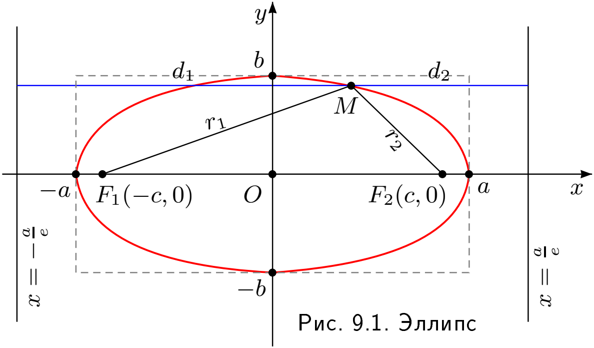

Рис. 9.1. Эллипс

Определение

Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Очевидно, что для эллипса $0 < e < 1$ (для окружности $e = 0$). Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Чем ближе e к 0, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе e к 1, тем более вытянутую форму имеет эллипс.

Лемма 9.1

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (2). Тогда
$$r_1 = a + ex_0, \quad r_2 = a - ex_0. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем $r_1 = |F_1M_0| = \sqrt{(x_0+c)^2 + y_0^2}$. Из (2) выразим $y_0 = b^2 - \dfrac{b^2x_0^2}{a^2}$. С учётом $c^2 = a^2 - b^2$ и $c = ea$ получим
$$\begin{aligned} r_1 &= (x_0^2 + c^2) + y_0^2 = x_0^2 + 2x_0c + c^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} = \\ &= x_0^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2x_0c + a^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2x_0c + a^2 = \\ &= e^2x_0^2 + 2x_0ea + a^2 = (a + ex_0)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $|x| \leqslant a$ и $0 < e < 1$, то $a + ex_0 > 0$, значит, $r_1 = a + ex_0$.

Аналогично доказывается, что $r_2 = a - ex_0$. $\square$

Фокальное свойство эллипса (1)

Теорема 9.1 (фокальное свойство эллипса)

Точка M принадлежит эллипсу, заданному уравнением (2), тогда и только тогда, когда
$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна из формул (3) леммы 9.1.

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости такая, что $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Запишем это равенство в координатах.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Далее возведем обе части равенства в квадрат, затем выразим оставшийся корень и снова возведем в квадрат. Преобразуя получившееся выражение с учётом $c^2 = a^2 - b^2$ придём к уравнению (2). $\square$

Выполните недостающие выкладки в доказательстве теоремы 9.1 в качестве упражнения.

Следствие теоремы 9.1.

Эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух различных фиксированных точек есть величина постоянная большая, чем расстояние между этими фиксированными точками.

Определения

Прямые $x = -\dfrac{a}{e}$ и $x = \dfrac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса (соответственно *левой* и *правой*).

Расстояния от точки M, принадлежащей эллипсу, до директрис называются *директориальными расстояниями*. Расстояние до левой директрисы обозначается d_1, а до правой — d_2 (см. рис. 9.1).

Поскольку $e < 1$, то директрисы не пересекают эллипс, располагаясь симметрично относительно начала координат слева и справа от него (см. рис. 9.1). Следующая теорема проясняет геометрический смысл директрис и директориальных расстояний.

Директориальное свойство эллипса (1)

Теорема 9.2 (директориальное свойство эллипса)

Точка M принадлежит эллипсу, заданному уравнением (2), тогда и только тогда, когда

$$e = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}.$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим левую директрису. Её общее уравнение $x + \dfrac{a}{e} = 0$. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, то $d_1 = \left|x_0 + \dfrac{a}{e}\right| = \dfrac{a + ex_0}{e}$ с учётом $a + ex_0 > 0$. Поскольку по лемме 9.1 $r_1 = a + ex_0$, получим $d_1 = \dfrac{r_1}{e}$, откуда $e = \dfrac{r_1}{d_1}$. Равенство $e = \dfrac{r_2}{d_2}$ доказывается аналогично.

Достаточность. Пусть $M(x, y)$ — точка плоскости такая, что $e = \dfrac{r_1}{d_1}$. Имеем $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $d_1 = \left|x + \dfrac{a}{e}\right|$. Поскольку $r_1 = ed_1$, то

$$(x+c)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2 = (a + ex)^2.$$

Директориальное свойство эллипса (2)

Преобразовав равенство

$$(x+c)^2 + y^2 = (a+ex)^2$$

с учётом $e = \dfrac{c}{a}$ и $c^2 = a^2 - b^2$, получим уравнение (2). $\square$

Выполните недостающие выкладки в доказательстве теоремы 9.2 в качестве упражнения.

Следствие теоремы 9.2.

Эллипс — это геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой, не проходящей через эту фиксированную точку, есть величина постоянная меньшая 1.

9.3. Касательная к эллипсу

Теорема 9.3

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, заданному уравнением (2). Тогда касательная к эллипсу в точке M_0 имеет уравнение

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что точка M_0 лежит в I квадранте. Рассмотрим функцию $y(x) = \dfrac{a}{b}\sqrt{a^2 - x^2}$ и запишем уравнение касательной к графику функции в точке M_0:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Поскольку $y' = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ и $y_0 = \dfrac{a}{b}\sqrt{a^2 - x_0^2}$, получим

$$y - y_0 = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}(x - x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Оптическое свойство эллипса (1)

Умножим обе части полученного равенства на $\dfrac{y_0}{b^2}$:

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) = -\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad \square$$

Теорема 9.4. (оптическое свойство эллипса)

Свет от источника, находящегося в одном из фокусов эллипса, отражается эллипсом так, что отраженные лучи пересекаются во втором фокусе.

Доказательство. Зафиксируем на эллипсе точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем касательную к эллипсу в этой точке ℓ. Опустим перпендикуляры F_1K и F_2N из фокусов на эту касательную (см. рис. 9.2 на следующем слайде). Уравнение касательной ℓ (4) теоремы 9.3 можно привести к общему виду

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

Оптическое свойство эллипса (2)

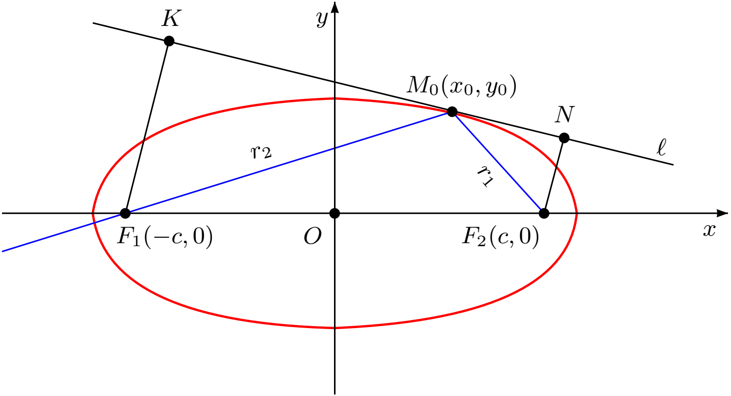

Рис. 9.2

Докажем, что $\triangle KM_0F_1 \sim \triangle NM_0F_2$. Поскольку это прямоугольные треугольники, то достаточно показать, что отношение длин катетов равно отношению длин гипотенуз.

Оптическое свойство эллипса (3)

Действительно,

$$|F_1K| = \frac{\left|-\frac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|x_0c + a^2|}{a^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}, \quad |F_2N| = \frac{\left|\frac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|x_0c - a^2|}{a^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Тем самым, с учетом $c = ea$ и формул (3) леммы 9.1

$$\frac{|F_1K|}{|F_2N|} = \frac{|x_0c + a^2|}{|x_0c - a^2|} = \frac{|x_0e + a|}{|x_0e - a|} = \frac{a + x_0e}{a - x_0e} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Из подобия треугольников $\triangle KM_0F_1$ и $\triangle NM_0F_2$ следует, что $\angle KM_0F_1 = \angle NM_0F_2$. $\square$

9.4. Параметрические уравнения эллипса

Утверждение 9.1

Пусть эллипс задан уравнением (2). Тогда уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (5)$$

будут его параметрическими уравнениями.

Доказательство. *Достаточность.* Если точка $M(x, y)$ такова, что для $t \in \mathbb{R}$ имеют место равенства (5), то $x^2 = a^2\cos^2 t$ и $y^2 = b^2\sin^2 t$.

Следовательно, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, т. е. точка M принадлежит эллипсу.

Необходимость. Если $a = b$, то справедливость утверждения следует из параметризации окружности (см. п. 6.1). Будем считать без ограничения общности, что $a > b > 0$, а точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу и лежит в I квадранте. Построим окружности с центром в начале координат радиусов a и b (см. рис. 9.3 на следующем слайде).

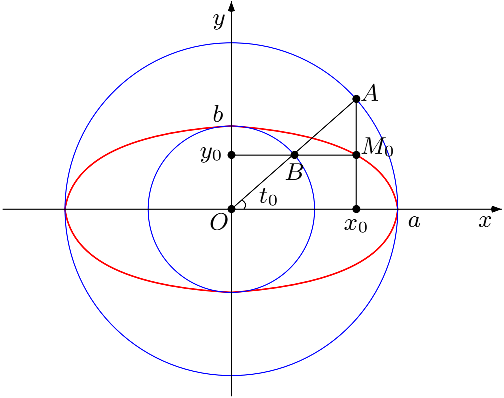

Рис. 9.3

Проведем через точку M_0 вертикаль. Точку пересечения вертикали с окружностью радиуса a обозначим через A. Также проведем через точку M_0 горизонталь. Точку пересечения горизонтали с окружностью радиуса b обозначим через B.

Параметрические уравнения эллипса (3)

Используем тот факт, что точка M_0 принадлежит эллипсу, т. е. $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$. Точка A имеет абсциссу x_0. Поскольку она лежит на окружности $x^2 + y^2 = a^2$, её ордината $y = \sqrt{a^2 - x_0^2} = a\sqrt{1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}} = \dfrac{ay_0}{b}$. Тем самым $\overrightarrow{OA} = \left(x_0, \dfrac{ay_0}{b}\right)$. Аналогично получаем $\overrightarrow{OB} = \left(\dfrac{bx_0}{a}, y_0\right)$. Заметим, что $\dfrac{x_0}{bx_0/a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{ay_0/b}{y_0}$. Тем самым координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ пропорциональны, а значит по признаку коллинеарности векторов (утверждение 1.11) $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$, т. е. точки O, B и A лежат на одной прямой.

В качестве значения параметра t_0 возьмем ориентированный угол наклона вектора $\overrightarrow{OA}$ к оси Ox. Тогда, используя параметрические уравнения окружностей (см. п. 6.1), получим $x_0 = a\cos t_0$, $y_0 = b\sin t_0$. □