Часть II. Прямые и плоскости

§8. Прямая в пространстве

Аналитическая геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

А. И. Белов

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
Департамент математики, механики и компьютерных наук

8.1. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве

Как и в случаях кривой на плоскости, кривую в пространстве можно задавать либо общими, либо параметрическими уравнениями. Общие уравнения в данном случае возникают из следующего простого наблюдения: любую кривую в пространстве можно представить как пересечение двух поверхностей.

Определение

Будем считать, что пространстве задана аффинная система координат $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Пусть кривая ℓ является пересечением поверхностей σ_1 и σ_2, поверхность σ_1 задана общим уравнением $F_1(x, y, z) = 0$, а поверхность σ_2 — общим уравнением $F_2(x, y, z) = 0$. Тогда уравнения

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

называются *общими уравнениями* кривой ℓ.

Из определения общего уравнения поверхности (см. § 7) вытекает, что

$$M(x_0, y_0, z_0) \in \ell \iff F_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ и } F_2(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Параметрические уравнения кривой в пространстве

Определение

Пусть $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ — аффинная система координат, а $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ — произвольные функции от одной переменной. Уравнения

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t) \end{cases} \tag{2}$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой ℓ в пространстве, если

$$M(x_0, y_0, z_0) \in \ell \iff \exists t_0 \in \mathbb{R}: \; x_0 = f(t_0), \; y_0 = g(t_0) \text{ и } z_0 = h(t_0).$$

Переменная t называется *параметром*.

Векторное уравнение прямой в пространстве

8.2. Виды уравнений прямой в пространстве в аффинной системе координат

Зафиксируем аффинную систему координат в пространстве $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Координатные оси будем традиционно обозначать Ox, Oy и Oz.

Определение

Пусть ℓ — прямая в пространстве. Любой вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ такой, что $\vec{a} \parallel \ell$ называется *направляющим вектором прямой ℓ*.

Векторное уравнение прямой в пространстве ничем не отличается от векторного уравнения на плоскости и выводится точно так же (см. § 6). Пусть прямая ℓ проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости и $\vec{a}$ — направляющий вектор ℓ, то $M \in \ell \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{M_0 M} \parallel \vec{a}$, а значит имеет место

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + t\vec{a}. \tag{3}$$

Уравнение (3) называют *векторным уравнением* прямой ℓ.

Запишем уравнение (3) в координатах: $[M] = [M_0] + t[\vec{a}]$. Пусть $\vec{a} = (p, q, r)$. Тогда получим

$$\begin{cases} x = x_0 + tp, \\ y = y_0 + tq, \\ z = z_0 + tr. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнения (4) называют *параметрическими уравнениями* прямой ℓ.

Выразим параметр t из уравнений (4) и приравняем его выражения. Получим

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \tag{5}$$

Уравнения (5) называются *каноническими уравнениями* прямой ℓ.

Как и на плоскости канонические уравнения (5) можно получить из критерия коллинеарности векторов (утверждение 1.11).

Теперь пусть прямая ℓ проходит через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В этом случае в качестве направляющего вектора ℓ можно взять вектор $\overrightarrow{M_1, M_2}$. Уравнение (5) в этом случае примет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *уравнением прямой по двум точкам*.

Теперь рассмотрим прямую ℓ как пересечение двух плоскостей π_1 и π_2, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Общее уравнение прямой в пространстве (2)

Из того, что плоскости π_1 и π_2 пересекаются, из теоремы 7.2 следует, что

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \tag{8}$$

Теорема 8.1.

В аффинной системе координат в пространстве прямые и только они являются геометрическими образами систем алгебраических уравнений 1-й степени с тремя неизвестными вида (7) с ограничениями на коэффициенты (8).

Доказательство. *Необходимость.* То, что для любой прямой можно составить её общие уравнения типа (7) показано выше.

Достаточность. Рассмотрим произвольную систему типа (7). Каждое из уравнений этой системы задает плоскость. В силу выполнения условия (8) эти плоскости пересекаются (см. теорему 7.2). Очевидно, что прямая, полученная в результате этого пересечения и есть множество решений системы (7). $\square$

Направляющий вектор (1)

Утверждение 8.1

Если прямая ℓ задана общими уравнениями (7) с условиями на коэффициенты (8), то вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

является направляющим вектором прямой ℓ.

Доказательство. Пусть $\vec{v}$ — некоторый направляющий вектор прямой ℓ. Первое уравнение системы (7) задает некоторую плоскость π_1, а второе — плоскость π_2. Поскольку $\vec{v} \parallel \pi_1$ и $\vec{v} \parallel \pi_2$, то по лемме 7.4 $\vec{v}$ является решением системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \end{cases}$$

Т. к. условие на коэффициенты (8) выполнено, то утверждение немедленно следует из леммы 7.1. $\square$

Направляющий вектор (2)

Замечания.

- В прямоугольной декартовой системе координат вектор $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ — нормальный вектор плоскости π_1, а $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальный вектор плоскости π_2. Тогда направляющий вектор $\vec{a}$ прямой ℓ из утверждения 8.1 можно записать как
$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$
- Направляющий вектор прямой ℓ можно найти и без утверждения 8.1. Для этого достаточно взять на ℓ две различные точки, т. е. два различных частных решения системы (7) $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, а в качестве $\vec{a}$ взять $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

8.3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Теорема 8.2

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая ℓ задана параметрическими уравнениями (4) или каноническими уравнениями (5). Тогда

1. ℓ и π пересекаются $\Leftrightarrow$ $Ap + Bq + Cr \neq 0$.
2. $\ell \parallel \pi$ $\Leftrightarrow$ $Ap + Bq + Cr = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.
3. $\ell \subset \pi$ $\Leftrightarrow$ $Ap + Bq + Cr = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Доказательство. Будем использовать параметрические уравнения (4). Подставим x, y, z из (4) в общее уравнение плоскости. Получим

$$A(x_0 + tp) + B(y_0 + tq) + C(z_0 + tr) + D = 0. \tag{9}$$

Точка $M(x, y, z) \in \ell \cap \pi$ тогда и только тогда, когда с одной стороны, существует $t \in \mathbb{R}$ такое, что выполняются равенства (4), а с другой стороны числа x, y, z удовлетворяют уравнению плоскости π. Тем самым t — решение (9).

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве (2)

То есть

1. ℓ и π пересекаются $\Leftrightarrow$ уравнение (9) имеет единственное решение,
2. $\ell \parallel \pi$ $\Leftrightarrow$ уравнение (9) не имеет решений,
3. $\ell \subset \pi$ $\Leftrightarrow$ уравнение (9) имеет бесконечно много решений.

Перепишем уравнение (9) в виде

$$(Ap + Bq + Cr)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0 \tag{10}$$

Очевидно, что уравнение (10) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Ap + Bq + Cr \neq 0$. Пункт *1* доказан.

Пусть теперь $Ap + Bq + Cr = 0$.

Уравнение (10) не имеет решений тогда и только тогда, когда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. Пункт *2* доказан.

Уравнение (10) имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Пункт *3* доказан. $\square$

Замечание. В прямоугольной декартовой системе координат если $\vec{a} = (p, q, r)$ — направляющий вектор прямой ℓ, точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$, а $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормальный вектор плоскости π, то заключение теоремы 8.2 можно переформулировать так

1. ℓ и π пересекаются $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \not\perp \vec{n}$,
2. $\ell \parallel \pi$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \perp \vec{n}$ и $M_0 \notin \pi$,
3. $\ell \subset \pi$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \perp \vec{n}$ и $M_0 \in \pi$.

8.4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

В этом пункте предполагается аффинная система координат. Как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т. е. как выяснить, являются ли они скрещивающимися, пересекающимися, параллельными или совпадающими?
Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы своими параметрическими уравнениями вида (4) или каноническими уравнениями вида (5). Из уравнения такого вида можно непосредственно получить координаты точки на прямой и её направляющего вектора.

Теорема 8.3

Пусть $M_1 \in \ell_1$ и $\vec{a}_1$ — направляющий вектор ℓ_1, а $M_2 \in \ell_1$ и $\vec{a}_2$ — направляющий вектор ℓ_2. Прямые ℓ_1 и ℓ_2:

1. скрещиваются $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ не компланарны,
2. пересекаются $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ компланарны и $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$,
3. параллельны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$,
4. совпадают $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$.

Доказательство. Отложим от точки M_1 векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

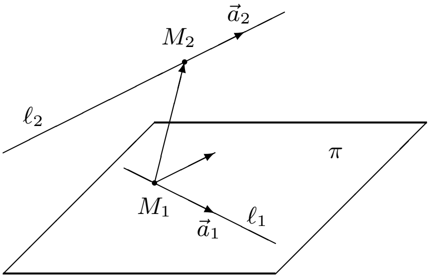

Рис. 8.1

Пусть π — плоскость, проходящая через M_1 так, что $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ её направляющие векторы. Тогда $\ell_1 \subset \pi$ и $\ell_2 \parallel \pi$ (см. рис. 8.1).

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются $\Leftrightarrow$ ℓ_1 и ℓ_2 не лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ $\ell_2 \not\subset \pi$ и $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ не компланарны. Пункт *1* доказан.

В остальных пунктах прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости. В таком случае
ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$;
$\ell_1 \parallel \ell_2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ и $M_2 \notin \ell_1$;
$\ell_1 = \ell_2$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ и $M_2 \in \ell_1$; $\square$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве (3)

Замечание. Заключение теоремы 8.3 можно переписать в координатах.

Если $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_1=(p_1,q_1,r_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}_2=(p_2,q_2,r_2)$ и

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix},$$

то прямые ℓ_1 и ℓ_2:

1. скрещиваются $\Leftrightarrow$ $\Delta\ne 0$;
2. пересекаются $\Leftrightarrow$ $\Delta=0$, $\dfrac{p_1}{p_2}\ne\dfrac{q_1}{q_2}$ или $\dfrac{q_1}{q_2}\ne\dfrac{r_1}{r_2}$;
3. параллельны $\Leftrightarrow$ $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{q_1}{q_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$, $\dfrac{x_2-x_1}{p_1}\ne\dfrac{y_2-y_1}{q_1}$ или $\dfrac{y_2-y_1}{q_1}\ne\dfrac{z_2-z_1}{r_1}$;
4. совпадают $\Leftrightarrow$ $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{q_1}{q_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$ и $\dfrac{x_2-x_1}{p_1}=\dfrac{y_2-y_1}{q_1}=\dfrac{z_2-z_1}{r_1}$.

8.5. Расстояние от точки до прямой в пространстве

В этом пункте зафиксирована прямоугольная декартовая система координат. Пусть ℓ — прямая, заданная параметрическими (4) или каноническими (5) уравнениями, $\vec{a} = (p, q, r)$ — её направляющий вектор и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$. Тогда справедливо

Утверждение 8.2

Расстояние от произвольной точки пространства M_1 до прямой ℓ равно

$$d(M_1, \ell) = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\vec{a}|}.$$

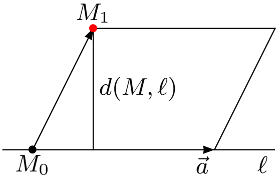

Рис. 8.2

Доказательство. Отложим $\vec{a}$ от точки M_0. Расстояние от M до ℓ — это длина высоты параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0 M_1}$ (см. рис. 8.2). Формула утверждения немедленно следует из утверждения 3.4. □

8.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

В этом пункте зафиксирована прямоугольная декартовая система координат. Используем обозначения п. 8.4. Тогда

Утверждение 8.3

Расстояние между скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равно

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{a}_1\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}.$$

Доказательство. Искомое расстояние равно расстоянию от любой точки на прямой ℓ_2 до плоскости π, проходящей через ℓ_1 параллельно ℓ_2 (см. рис. 8.1 в п. 8.4). Очевидно, что это расстояние равно длине высоты параллелепипеда, построенного на векторах M_1M_2, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, отложенных от точки M_1. Но длина высоты параллелепипеда равна отношению его объема к площади основания. Тем самым формула утверждения немедленно следует из утверждений 4.2 и 3.4. □

8.7. Угол между прямой и плоскостью

В этом пункте зафиксирована прямоугольная декартовая система координат. Пусть ℓ — прямая, $\vec{a}$ — направляющий вектор ℓ; π — плоскость, $\vec{n}$ — нормальный вектор π.

Определение

Если ℓ компланарна π или лежит в π, то угол между ℓ и π по определению считается равным нулю.

Если ℓ пересекает π, то угол между ℓ и π — это угол между ℓ и её ортогональной проекцией на плоскость π.

Утверждение 8.4

Если ℓ пересекает π, то

$$\sin(\widehat{\ell, \pi}) = \frac{|\vec{n}\vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}.$$

Доказательство. Пусть m — ортогональная проекция ℓ на π, $\alpha = (\widehat{\ell, \pi})$, β — острый угол между ℓ и перпендикуляром к π (см. рис. 8.3). Тогда

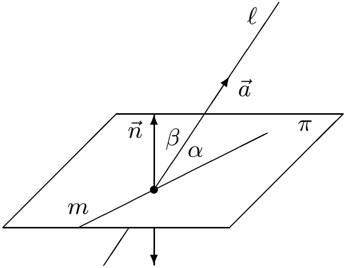

Рис. 8.3

$\beta = (\widehat{\vec{n}, \vec{a}})$ или $\beta = 180^\circ - (\widehat{\vec{n}, \vec{a}})$.
Поскольку $\alpha + \beta = 90^\circ$,
то $\sin\alpha = \cos\beta = |\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{a}})|$.
Формула утверждения следует из теоремы 2.2. □

Замечание.
Если $\vec{a} = (p, q, r)$, а $\vec{n} = (A, B, C)$, то формулу утверждения 8.4 можно записать в координатах

$$\sin(\widehat{\ell, \pi}) = \frac{|Ap + Bq + Cr|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$